

Práctico 2

1. Describir todos los subgrupos de \mathbb{Z}_4 , \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_6 y \mathbb{Z}_8 y del grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. ¿Vale $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_4$?
2. Sean H y K subgrupos de un grupo G . Probar que $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ es un subgrupo de G si y solo si $HK = KH$. Probar que $KH \subset HK$ implica $KH = HK$.
3. Sea $G \neq \{1\}$ un grupo que no admite subgrupos propios. Probar que G es cíclico finito de orden primo.
4. Probar que si un grupo G contiene dos elementos g, f de orden finito, que conmutan entre sí y tales que sus órdenes son primos entre sí, entonces $\langle g, f \rangle$ es cíclico.
5. a) Sean G, F grupos y $G \times F$ su producto directo. Consideramos $G_0 = \{(g, 1) \in G \times F : g \in G\}$ y $F_0 = \{(1, f) \in G \times F : f \in F\}$. Probar que los elementos de G_0 conmutan con los de F_0 y valen $G \simeq G_0 < G \times F$; $F \simeq F_0 < G \times F$; $G_0 \cap F_0 = \{(1, 1)\}$; $G \times F = G_0 F_0$.
b) Sea G un grupo y H, K subgrupos de G tales que $hk = kh$, para todo $h \in H, k \in K, H \cap K = \{1\}$ y $G = HK$. Probar que $\varphi : H \times K \rightarrow G$ definido por $\varphi(h, k) = hk$ es un isomorfismo.
6. Sean G_1, \dots, G_m grupos cíclicos finitos cuyos órdenes son primos dos a dos. Probar que el producto directo $G = G_1 \times \dots \times G_m$ es cíclico. *Sugerencia:* probarlo para $m = 2$ y luego aplicar inducción en m .
7. Sea G un grupo y consideramos $\varphi : G \rightarrow G$ definido por $\varphi(g) = g^{-1}$, para todo $g \in G$. Probar que $\varphi \in \text{Aut}(G)$ si y solo si G es abeliano.
8. Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico. Probar que si $\varphi \in \text{Aut}(G)$, entonces $\varphi(g)$ es un generador de G . Recíprocamente, probar que si f es otro generador de G , entonces existe $\varphi \in \text{Aut}(G)$ tal que $\varphi(g) = f$.
9. Probar: $\text{Aut } \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$; $\text{Aut } \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n^\times$, $n \in \mathbb{Z}^+$ (\mathbb{Z}_n^\times es el grupo multiplicativo de los invertibles de \mathbb{Z}_n); $\text{Aut } \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_4$; $\text{Aut } \mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2$; $\text{Aut } \mathbb{Z}_8 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
10. a) Sean p, q números primos. Probar que todo morfismo de grupos $\tau : \mathbb{Z}_p \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_q)$, $\bar{k} \mapsto \tau_{\bar{k}}$, es de la forma $\tau_{\bar{k}}(\bar{n}) = \bar{r}^k \bar{n}$, $\forall k, n \in \mathbb{Z}$, siendo $r \in \mathbb{Z}$ tal que $r^p \equiv 1 \pmod{q}$.
b) Si τ y r son como en la parte a), probar que τ es el morfismo trivial si y solo si $r \equiv 1 \pmod{q}$.
11. Sean H y K subgrupos de un grupo G .
a) Probar que tiene sentido definir $\varphi : H/H \cap K \rightarrow G/K$ mediante $\varphi(h(H \cap K)) = hK$, $\forall h \in H$. Deducir que si $[G : K] < \infty$, entonces $[H : H \cap K] < \infty$ y $[H : H \cap K] \leq [G : K]$.
b) Si $[G : K] < \infty$, probar $[H : H \cap K] = [G : K]$ si y solo si $G = HK$.
12. Sean H y K subgrupos de índice finito de G . Probar:
a) El índice de $H \cap K$ en G es finito y $[G : H \cap K] \leq [G : H][G : K]$.
b) Vale $[G : H \cap K] = [G : H][G : K]$ si y solo si $G = HK$.
c) Si $[G : H]$ y $[G : K]$ son primos entre sí, entonces $G = HK$.
13. Sea G un grupo de orden 4. Probar que si G no es cíclico, entonces G es abeliano y existen H, K subgrupos de orden 2 tales que $G = HK$ y $H \cap K = \{e\}$. Concluir $G \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ o $G \simeq \mathbb{Z}_4$.
14. Determinar los retículos de subgrupos de Q y de D_4 . *Sug.:* usar Lagrange y el ej. 10 del Pr. 1.
15. Probar $[\mathcal{M} : \mathcal{M}_+] = 2$. Deducir que si $G < \mathcal{M}$, entonces $G \subset \mathcal{M}_+$ o $[G : G_+] = 2$, siendo $G_+ = G \cap \mathcal{M}_+$.