

Práctico 3

1. Sea X un G -conjunto e Y un subconjunto de X . Probar que Y es G -estable si y sólo si Y es unión de órbitas de X .
2. Sean H y K subgrupos finitos de un mismo grupo G . Consideramos el conjunto HK .
 - a) Probar que $(h, k) \cdot (h_0k_0) = hh_0k_0k^{-1}$ define una acción transitiva del grupo $H \times K$ en HK .
 - b) Deducir $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.
3. Si un grupo G actúa en un conjunto X , ¿qué relación hay entre G_x y G_y cuando x e y están en la misma órbita?
4. Probar que el grupo aditivo \mathbb{R} actúa en \mathbb{R}^2 definiendo $r \cdot (x, y) = (x + r, y)$. Investigar si esta acción es fiel y dibujar las órbitas de la acción.
5. El grupo lineal $GL_n(\mathbb{k})$ actúa en el conjunto de las matrices $M_n(\mathbb{k})$ mediante $A \cdot X = AXA^{-1}$.
 - a) Investigar si esta acción es fiel.
 - b) Probar que los puntos fijos de esta acción son las matrices escalares.
6. Probar que el grupo $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$ actúa por conjugación (como en el ejercicio 5) en las matrices triangulares $T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$. Observar que T se puede identificar con \mathbb{R}^3 . Estudiar las órbitas de la acción de U en T y dibujarlas en \mathbb{R}^3 . Dar un conjunto de representantes de las órbitas.
7. Sea P_n un polígono regular. El grupo diedral $D_n = \text{Sim}(P_n)$ actúa en P_n mediante $\varphi \cdot p = \varphi(p)$. Notar que esta acción es fiel (¿por qué?). Considerando la acción de D_3 en los vértices (numerados) del triángulo equilátero, probar que vale $D_3 \simeq \mathcal{S}_3$. ¿Vale $D_n \simeq \mathcal{S}_n$, si $n > 3$?
8. Consideremos el tetraedro regular \mathcal{T} . Sean c su centro (el punto que equidista de los vértices) y G_+ el grupo de simetrías directas de \mathcal{T} . Notar que G_+ actúa naturalmente en los vértices y caras de \mathcal{T} .
 - a) Probar que G_+ es finito. *Sugerencia:* considerar la acción de G_+ en los vértices de \mathcal{T} . Notar que un movimiento queda determinado conociendo la imagen de cuatro puntos no coplanares.
 - b) Probar que si $\varphi \in G_+$, entonces $\varphi(c) = c$; luego φ es una rotación cuyo eje contiene a c . *Sugerencia:* usar que los movimientos directos del espacio son las rotaciones y las traslaciones.
 - c) Notar que G_+ actúa naturalmente en el conjunto de las caras de \mathcal{T} . Probar que esta acción es transitiva y que el estabilizador de una cara es el grupo cíclico C_3 . Concluir que el orden de G_+ es 12 y describir sus elementos.
 - d) Razonando análogamente, determinar el orden de $\text{Sim}_+(\mathcal{C})$ el grupo de simetrías directas del cubo \mathcal{C} . Notando que $\text{Sim}_+(\mathcal{C})$ actúa en el conjunto de vértices opuestos de \mathcal{C} , deducir $\text{Sim}_+(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{S}_4$.
 - e) Mostrar que la acción de $\text{Sim}_+(\mathcal{C})$ en el conjunto de caras opuestas de \mathcal{C} no es fiel. Hallar el núcleo del morfismo asociado a esa acción. ¿Qué grupo se obtuvo?
 - f) Notar que el tetraedro y el cubo tienen planos de simetría, luego ambos admiten simetrías indirectas. Usando el último ejercicio del práctico 2, deducir los órdenes de $\text{Sim}(\mathcal{T})$ y $\text{Sim}(\mathcal{C})$.

Nota. Esta técnica sirve para calcular el orden del grupo de simetrías de cualquier poliedro regular.