Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2022

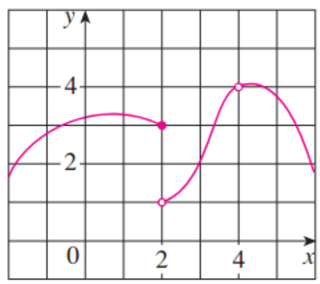
Práctico 2: Repaso de límites y continuidad

1. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}; \quad (b)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^7-1}{x^3-1}; \quad (c)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}.$$

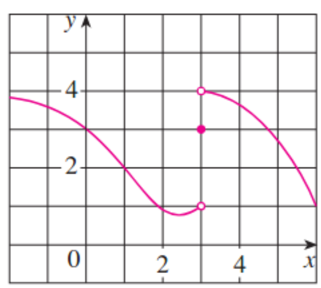
2. Utilice la gráfica de f para establecer el valor de cada cantidad si esta existe. Si no existe, explique por qué.

$$a)\ \lim_{x\to 2^-} f(x); \quad b)\ \lim_{x\to 2^+} f(x); \quad c)\ \lim_{x\to 2} f(x); \quad d)\ f(2); \quad e)\ \lim_{x\to 4} f(x); \quad f)\ f(4).$$



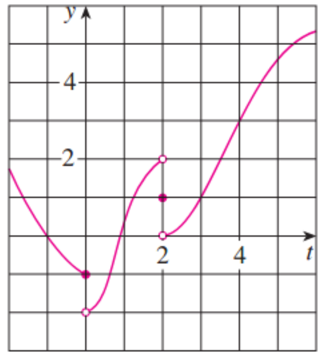
3. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explicar por qué.

$$a)\ \lim_{x\to 1} f(x); \quad b)\ \lim_{x\to 3^-} f(x); \quad c)\ \lim_{x\to 3^+} f(x); \quad d)\ \lim_{x\to 3} f(x); \quad e)\ f(3).$$



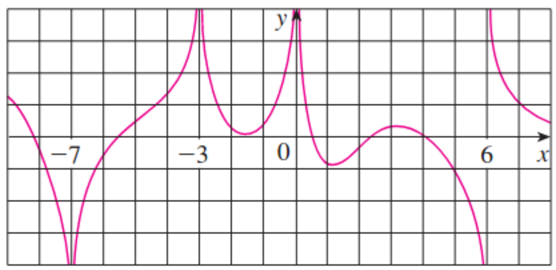
4. Para la función g cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades si existe. Si no, explique por qué.

a) $\lim_{t\to 0^-} g(t)$;
b) $\lim_{t\to 0^+} g(t)$;
c) $\lim_{t\to 0} g(t)$;
d) $\lim_{t\to 2^-} g(t)$;
e) $\lim_{t\to 2^+} g(t)$;
f) $\lim_{t\to 2} g(t)$;
g) $g(2)$;
h) $\lim_{t\to 4} g(t)$.



5. Para la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente:

$a)$ $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$; $b)$ $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$; $c)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $d)$ $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$; $e)$ $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)$.



Determinar las ecuaciones de las asintóticas verticales.

6. Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones y utilícelas para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} 1+\operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

7. Determinar cada uno de los siguientes límites infinitos:

a) $\lim_{x\to -3^+} \frac{x+2}{x+3}$;

b) $\lim_{x\to -3^-} \frac{x+2}{x+3}$;

c) $\lim_{x\to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$;

d) $\lim_{x\to 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3}$;

e) $\lim_{x\to 3^+} \log(x^2-9)$;

f) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$;

g) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$.

8. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca lo siguiente:

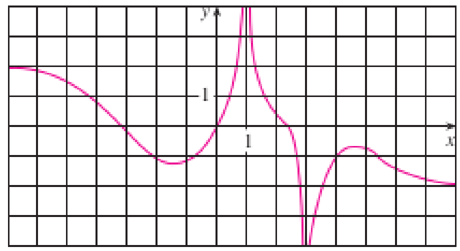
a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$;

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

c) $\lim_{x\to 1} f(c)$;

d) $\lim_{x\to 3} f(x)$;

e) Ecuaciones de las asíntotas.



9. Encuentre el límite o demuestre que no existe:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{2x+1}$;

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^3+x-1}$;

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^6}{x^4+1}$;

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1}$;

e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-e^x}{1+2e^x}$;

f) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

10. Explicar por qué cada una de las siguientes funciones es discontinua en el punto $x = a$ dado. Dibuje la gráfica de la función en los casos $a), b), c)$ y $e)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad a = -2.$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases}, \quad a = -2.$

c) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \quad a = 0.$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}, \quad a = 1.$

e) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad a = 0.$

11. Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de éstos f es continua por derecha, por izquierda o ninguna de las dos? Trace la gráfica de f en cada caso.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

12. Encuentre los valores de a y b que hacen a f continua para todo x.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

13. Utilice el teorema de Bolzano para demostrar que existe (al menos) una solución de cada una de las ecuaciones dadas en el intervalo especificado.

a) $x^4 + x - 3 = 0$, $(1, 2)$;

b) $\sqrt[3]{x} = 1 - x$, $(0, 1)$.

14. Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene al menos una solución.

a) $\cos x = x^3$

b) $\ln x = 3 - 2x$

Utilice la calculadora para hallar un intervalo de longitud $0,01$ que contenga una solución.

Ejercicios opcionales

15. ¿Existe un número que sea 1 más que su cubo?

16. Un tren sale de la estación A a las 12:00 y llega a la estación B a las 19:00 del mismo día. Al día iguiente, en mismo tres sale en la dirección contraria, desde la estación B, a las 12:00, arribando a la estación A a las 19:00. Demostrar que existe un punto del trayecto en el cual el tren ha pasado en ambas direcciones a la misma hora.

17. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velcidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donce m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué pasa cuando $v \to c$?