Facultad de Ciencias.
Matemática Discreta 2020

Práctico 2: Relaciones

1. Describir por extensión la relación $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} |\ x^2 + y^2 = 4\}$. Representar en el plano la relación $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ x^2 + y^2 = 4\}$.

2. Una relación $\mathcal{R}$ sobre A se dice:

   a) **reflexiva** si $a\mathcal{R}a$ para todo $a \in A$,
   b) **irreflexiva** si $a\not\mathcal{R}a$ para todo $a \in A$,
   c) **simétrica** si para todo $a, b \in A$ tal que $a\mathcal{R}b$ se tiene $b\mathcal{R}a$,
   d) **asimétrica** si para todo $a, b \in A$ tal que $a\mathcal{R}b$ se tiene $b\not\mathcal{R}a$,
   e) **antisimétrica** si para todo $a, b \in A$ tal que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$, se tiene $a = b$.
   f) **transitiva** si para todos $a, b, c \in A$ tales que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ se tiene $a\mathcal{R}c$.

   Investigar si las siguientes relaciones son o no reflexivas, irreflexivas, simétricas, etc.:

   - sobre el conjunto de las personas: ser padre/madre de, ser hermano/a de.
   - sobre $\mathbb{N}$: ser la mitad de.
   - idem anterior pero sobre $\mathbb{Z}$.
   - sobre el conjunto de las rectas de un plano: ser perpendicular a, ser paralela a.
   - para un universo $\mathcal{U}$ y un subconjunto fijo C de $\mathcal{U}$, definimos $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que si $A \subseteq \mathcal{U}$, $B \subseteq \mathcal{U}$ entonces $A\mathcal{R}B$ si $A \cap C = B \cap C$.
   - sobre $\mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y$ si $x - y$ es par
   - sobre $\mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y$ si $x + y$ es par.
   - idem anteriores cambiando par por impar.
   - sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si $a \leq c$.

3. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. En cada caso, dar un ejemplo de relación sobre A como se especifica:

   a) reflexiva y simétrica, pero no transitiva;
   b) reflexiva y transitiva, pero no simétrica;
   c) simétrica y transitiva, pero no reflexiva;
   d) no reflexiva y no irreflexiva.

4. Inspirarse en la definición de función inversa para dada una relación $\mathcal{R}$ de A en B, definir una relación inversa de B en A.

5.
   a) Dadas relaciones $\mathcal{R}$ de A en B y $\mathcal{S}$ de B en C, dar una posible definición de $S \circ R$ que sea una relación de A en C (composición de relaciones).
   b) Interpretar la transtividad en términos de composición de relaciones.

6. Averiguar cuáles de las relaciones del ejercicio 2 son de orden y, de estas, hallar cuáles son órdenes totales.

7. Sea $\mathcal{R}$ la relación de ser divisor en $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
   a) Para cada propiedad del ejercicio 2, investigar si esta relación la cumple.
   b) Probar que es una relación de orden. Probar que este orden no es total.
   c) Determinar los elementos minimales, mínimos, maximales y máximos de esta relación.
   d) Determinar si el conjunto de los números primos está acotado superiormente o inferiormente.

8. Se dice que un orden sobre A es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío tiene mínimo.
   a) Observar que el orden usual de $\mathbb{N}$ es un buen orden y que el de $\mathbb{Z}$ no lo es.
   b) Probar que todo buen orden es total e investigar sobre la validez del recíproco.
   c) Definir un buen orden sobre $\mathbb{Z}$.

9.
   a) ¿Puede ser una relación de orden y de equivalencia a la vez?
   b) Averiguar cuáles relaciones del ejercicio 2 son de equivalencia.

10. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
    a) Hallar $\sim$ una relación de equivalencia con la menor cantidad de elementos posible que contiene a los pares $(1, 2)$ y $(4, 5)$.
    b) Para la relación definida por la parte anterior, hallar [1], [2] y [3].

11. Consideramos la relación de congruencia módulo n en $\mathbb{Z}$: $a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b$ es multiplo de n.
    a) Calcular el cociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$, al que notaremos por $\mathbb{Z}_n$.
    b) Probar que si $a \equiv_n a'$ y $b \equiv_n b'$, entonces:
       - $a + b \equiv_n a' + b'$

- $a.b \equiv_n a'.b'$.

El punto b permite definir la suma y el producto en $\mathbb{Z}_n$ por $[a] + [b] = [a + b]$ y $[a].[b] = [a.b]$.

12. Sea la relación en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ dada por $u \sim v$ si y sólo si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $u = \lambda v$.

    a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

    b) Determinar cuáles son las clases de equivalencia y representar una clase de equivalencia geometricamente.

    c) Elegir un representante de cada clase de forma que el conjunto de representantes elegido sea facilmente representable geometricamente.

13. *a*) Sea la relación en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dada por $u \sim v$ si y sólo si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. Probar que es una relación de equivalencia. Elegir un conjunto de representantes de las clases y representar geométricamente.

    b) Sea la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ dada por $u \sim v$ si y sólo si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. ¿Qué sucede con la representación geométrica de las clases de equivalencia en este caso?

14. *a*) Determinar qué propiedades tiene la matriz asociada a una relación:

    - Reflexiva
    - Simétrica
    - Antisimétrica
    - Asimétrica

    b) ¿Cómo se relacionan las matrices asociadas a $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^{op}$?

    c) Interpretar en terminos de la matriz asociada a una relación que implican la composición de relaciones y la transitividad.

Segunda entrega: se pide entregar el ejercicio 7 antes del 12 de mayo.