Práctico 1: Trigonometría Esférica

1. Para medir el radio de la Tierra, Eratóstenes usó en el Siglo III AC un método trigonométrico combinado con observaciones. Se sabía que en la ciudad de Siena (actual Asuán en Egipto) ubicada en $(\phi, \lambda) = (24°05'N, 32°54'E)$ el día del solsticio de verano una vara vertical no proyectaba sombra al medio día mientras que al mismo tiempo en la ciudad de Alejandría ubicada en $(\phi, \lambda) = (31°12'N, 29°55'E)$ una vara de 1 m de longitud proyectaba una sombra de $12,63$ cm. Si en ese entonces se estimaba que la distancia entre Siena y Alejandría era de 924 km:

   (a) ¿Cuál fue el radio de la Tierra calculado por Eratóstenes?

   (b) ¿Qué hipótesis son las empleadas para resolver este problema?

   Respuesta: 7357 km

2. Dos barcos X e Y están navegando siguiendo los paralelos de latitudes $\phi = 48°N$ y $\phi = 15°S$ respectivamente, de tal manera que en todo instante los dos barcos están sobre el mismo meridiano. Si la velocidad del barco X es 35 km/h ¿cuál es la velocidad del barco Y?.

   Respuesta: $50,52$ km/h

3. Si A y B son dos lugares en la superficie de la Tierra con la misma latitud ϕ y la diferencia de sus longitudes geográficas es $2l$, pruebe que:

   (a) La mayor latitud alcanzada por el círculo máximo que pasa por A y B es $\phi_M = \arctan(\tan\phi \sec l)$

   (b) La diferencia Δ_{AB} entre la distancia medida a lo largo del paralelo de latitud entre A y B y la distancia AB tomada sobre el círculo máximo viene dada por:

   $$\Delta_{AB} = 2R[l\cos\phi - \arcsin(\sin l \cos\phi)]$$

   donde R es el radio de la Tierra.

4. Considere 2 observadores A y B localizados sobre la superficie terrestre en las coordenadas (ϕ_A, λ_A) y (ϕ_B, λ_B). Si el observador B realiza un pequeño desplazamiento $\Delta\phi_B$ a lo largo de un meridiano, probar que la distancia AB a lo largo de un circulo máximo varía en:

   $$\Delta(AB) = \frac{\Delta\phi_B\Big[\sin\phi_B\cos\phi_A\cos(\lambda_B - \lambda_A) - \sin\phi_A\cos\phi_B\Big]}{\sin(AB)}$$

5. Un avión parte de la ciudad de Lima ubicada en $(\phi, \lambda) = (12°10'S, 77°5'W)$ y vuela directamente hacia la ciudad de Roma ubicada en $(\phi, \lambda) = (41°53'N, 12°33'E)$.

   (a) Calcule la distancia lineal total recorrida en km

   (b) La longitud geográfica en la que el avión cruza el ecuador terrestre.

   Respuestas: $\widehat{LR} = 10{,}877$ km, $\lambda = 63°35'W$

6. Viaje a Sydney. Desplazándonos por la superficie de la Tierra nos proponemos llegar a la ciudad de Sydney $(\phi, \lambda) = (-34°, +151°)$ partiendo desde Montevideo $(\phi, \lambda) = (-35°, -56°)$ y siguiendo el circulo máximo de mínima longitud.

(a) Suponiendo la Tierra esférica hallar el azimut (medido en el sentido N-W-S-E) de la dirección hacia donde debemos comenzar el recorrido.

(b) Calcular la longitud del arco de círculo máximo expresado en radios terrestres.

Respuestas: $A = 156°53'$, $\widehat{MS} = 1,86 R_T$

7. Dar argumentos geométricos para mostrar:

   (a) La intersección de un plano con una esfera produce una circunferencia.

   (b) Dados dos puntos en una esfera hay un único círculo máximo que los conecta.

   (c) La conexión de tres puntos en una esfera mediante círculos máximos define un *único* triángulo esférico.

   (d) La suma de los lados A, B y C de un triángulo esférico cumple con $\pi \leq A + B + C \leq 3\pi$.

8. Considere un triángulo esférico de ángulos diedros A, B y C y lados a, b y c, respectivamente opuestos a cada ángulo diedro. A partir de la definición del producto vectorial demuestre el *Teorema del Seno*:

$$\frac{SenA}{Sena} = \frac{SenB}{Senb} = \frac{SenC}{Senc}$$

9. ¿Cuántas veces más grande es el área de la superficie terrestre encerrada entre los paralelos de latitud $\phi_1 = 30°$ y $\phi_2 = 40°$ que el área encerrada entre los paralelos de latitud $\phi_3 = 70°$ y $\phi_4 = 80°$?

   Respuesta: $A_{\phi_1\phi_2} = 3,165 A_{\phi_3\phi_4}$