Álgebra Lineal I. Curso 2020 **Facultad de Ciencias**

Actividad 3: Geometría lineal II

1. **Distancia de punto a plano**

   a) Calcular la distancia del punto $M = (-2, -4, 3)$ al plano $\pi_1)\ 2x - y + 2z = 0$.

   b) Hallar una fórmula general para la distancia de un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ a un plano de ecuación $ax + by + cz = d$.

2. Verificar que los siguientes planos son paralelos y hallar la distancia entre ellos.

   (a) $\pi_1)\ x - 2y - 2z = 12,\ \ \pi_2)\ x - 2y - 2z = 6$

   (b) $\pi_1)\ 2x - 3y + 6z = 14,\ \ \ \pi_2)\ 4x - 6y + 12z = -21$

3. **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**

   a) Demostrar para $u, v \in \mathbb{R}^3$, que
   $$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$$

   b) Probar que la igualdad se cumple si y sólo si u, v son colineales (linealmente dependientes).

4. **Producto vectorial**

   a) En clase: definición geométrica.

   b) Dados vectores $u = (a, b, c), v = (a', b', c')$, se considera el vector
   $$w = (bc' - cb', a'c - ac', ab' - a'b)$$

      1) Probar que w es perpendicular a u y a v.
      2) Probar que $||w||^2 = ||u||^2||v||^2(1 - cos^2\alpha)$ siendo α el menor ángulo que se forma para ir de u a v.
      3) Deducir que w tiene la misma dirección y norma que $u \wedge v$.

   c) En clase: expresión en coordenadas y propiedades.

5. En cada caso, hallar $\langle u, v\rangle$ y $u \wedge v$

   (a) $u = (2, 3, 1)$ y $v = (1, -1, 0)$.

   (b) $u = (1, 0, 4)$ y $v = (2, 1, 0)$.

6. En clase: **área de un paralelogramo, volumen de un paralelipípedo**.

7. Hallar una ecuación paramétrica y una cartesiana de cada una de las siguientes rectas.

   (a) La recta (r) que pasa por el punto $Q = (-1, 2, 0)$ y es paralela a la recta $s) \begin{cases} x &= 3 + \lambda \\ y &= -2\lambda \\ z &= 1 \end{cases}$

   (b) La recta (s) que pasa por el punto $P = (1, 2, 5)$ y es perpendicular al plano $z = 5$.

   (c) La recta (t) que pasa por el punto $A = (1, 0, 1)$ y es perpendicular a los vectores $(3, 0, 1), (1, -1, 0)$.

8. Decidir si las rectas del ejercicio anterior son paralelas, se cortan, o se cruzan. En caso de que no sean paralelas, decidir si son o no perpendiculares.

9. Hallar una ecuación paramétrica y una cartesiana de cada uno de los siguientes planos.

   a) El plano π que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es paralelo a los vectores $(2, -1, 1)$ y $(1, 0, -1)$.

   b) El plano σ que pasa por el punto $Q = (5, 2, 0)$ y es paralelo al plano de la parte anterior.

   c) El plano τ que pasa por el punto $M = (1, 1, 1)$ y contiene a la recta de ecuación $\begin{cases} x + y + z + 2 & = & 0 \\ x - y - z - 2 & = & 0 \end{cases}$

10. Siendo r, π, τ como en los ejercicios anteriores, hallar $r \cap \pi$ y $\pi \cap \tau$.

11. En clase: **conjuntos cerrados respecto a combinaciones lineales (rectas y planos por el origen, sistemas homogéneos)**

12. En clase: **dependencia e independencia lineal**

13. Averiguar si los siguientes conjuntos son o no son linealmente independientes:

    a) $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$,

    b) $\{(2, 0, 1), (1, -2, 0), (6, 0, 3)\}$,

    c) $\{(3, 0, 1), (1, 1, 1), (3, -3, 0)\}$,

    d) $\{(2, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

14. Probar que si $\{u, v\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces $\{u, v, u \wedge v\}$ también lo es.

15. Probar que si u, v son vectores en $\mathbb{R}^2$, no colineales, todo vector en $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de ellos. Deducir de la afirmación anterior que todo conjunto con 3 o más vectores de $\mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente.

16. **Afirmación que vamos a probar en la siguiente actividad pero que usaremos para los ejercicios que siguen:** si $\{u, v, w\}$ es un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ es linealmente independiente, entonces todo vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de ellos.

17. Deducir de la afirmación anterior que todo conjunto de 4 o más vectores en $\mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente.

18. Sean v_1, v_2 vectores no colineales en $\mathbb{R}^3$, ambos perpendiculares a un vector w no nulo. Probar que un vector v es perpendicular a w si y sólo si $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

19. Se considera la recta

$$r : \begin{cases} 2x - y + 3z & = 1 \\ 3x - 2y - 4z & = 2 \end{cases}$$

    a) Probar que r pertenece a todos los planos de ecuación:

$$(2\alpha + 3\beta)x - (\alpha + 2\beta)y + (3\alpha - 4\beta)z = \alpha + 2\beta,$$

    donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

    b) Probar que no hay otros planos a los que pertenece r.