Teoría Electromagnética
Curso 2022

Práctico 2
Extras

1. Una carga puntual q está a una distancia $d > R$ del centro de una esfera de radio R que se encuentra a potencial constante.

a) Determine el potencial fuera de la esfera.

b) Calcule la fuerza electrostática sobre la carga.

c) Grafique la fuerza sobre la carga como función de la distancia d.

d) ¿Qué relación guarda el resultado anterior con la función trabajo de un metal?

2. Una linea de carga infinita con densidad lineal λ se ubica paralela al eje z, en la posición $x = d$. En el origen existe un cilindro conductor de radio R cuyo eje de simetría coincide con el eje z. Considerando que el potencial eléctrico se anula en el infinito, calcule:

a) Magnitud y posición de la carga imagen (para generar dicho potencial).

b) Potencial en un punto arbitrario del espacio.

c) La densidad de carga inducida en el cilindro.

d) La fuerza por unidad de longitud en la línea de carga.

3. Considere el operador diferencial $D = \dfrac{d^2}{dx^2}$ en el intervalo $(0, L)$.

a) Muestre que la función

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1 - y/L) & \text{si } x < y \\ y(1 - x/L) & \text{si } x > y \end{cases}$$

es la función de Green para D en $(0, L)$ con condiciones de borde nulas.

b) Obtenga el desarrollo de Fourier (en x e y) de $G(x, y)$ en la base $\{\phi_n\}_{n=1,..}$ con

$$\phi_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right).$$

c) Muestre que la expresión para la delta de Dirac en la base de la parte b) es

$$\delta(x - y) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\phi_n(y)$$

y compare con el desarrollo para la función de Green calculado en b).

4. Muestre que la función de Green del Laplaciano apropiada para un problema de Dirichlet en el cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ tiene una expansión:

$$G(x, y; x', y') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y, y') \sin(n\pi x) \sin(n\pi x')$$

donde $g_n(y, y')$ es la función simétrica que satisface

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - n^2\pi^2\right) g_n(y, y') = -4\pi\delta(y - y') \qquad g_n(y, 0) = g_n(y, 1) = 0.$$

Escriba a g_n como combinación lineal de $\sinh(n\pi y')$ y $\cosh(n\pi y')$ en las regiones $y > y'$ y $y < y'$. Use la discontinuidad en la derivada requerida por la delta para mostrar que

$$g_n(y, y') = \frac{4}{n \sinh(n\pi)} \sinh(n\pi y_<) \sinh(n\pi(1 - y_>))$$

con $y_> = max(y, y')$, $y_< = min(y, y')$.

5. Determine la función de Green del Laplaciano en dos dimensiones para condiciones de contorno de Dirichlet y escriba la solución formal de un potencial arbitrario dado en el borde para:

a) un semiplano,

b) el exterior de un círculo.

6. Las aristas de una caja bidimensional cuadrada de lado $2a$ se encuentran a potenciales fijos. Dos caras opuestas están a potenciales V_0 y $-V_0$ y las restantes a potencial 0. Determine el potencial dentro de la caja.

7. Un pozo bidimensional rectangular está formado por un segmento de largo $2a$ a potencial $V(x)$ y dos lados infinitos a potencial 0. Determine el potencial en el pozo si:

a) $V(x) = V_0$

b) $V(x) = \begin{cases} -V_0 & 0 < x < a \\ V_0 & a < x < 2a \end{cases}$

8. Considere el problema de Dirichlet para un potencial $\Phi(x, y)$ que cumple la ecuación de Laplace en una región rectangular $R = [0, a] \times [0, b]$ con las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &= h_1(x) & \qquad \Phi(0, y) &= g_1(y) \\ \Phi(x, b) &= h_2(x) & \qquad \Phi(a, y) &= g_2(y) \end{aligned}$$

a) Explique cómo puede aplicarse el principio de superposición en este caso para reducir el problema a otros más simples que dependan sólo de una de las cuatro funciones h_1, h_2, g_1, g_2.

b) Resuelva el problema para el caso $a = 1, b = 2$ y:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 1 - x & \qquad g_1(y) &= \frac{y^2}{4} \\ h_2(x) &= 0 & \qquad g_2(y) &= 0. \end{aligned}$$

9. Considere la región bidimensional de la figura 1 determinada por $\rho \geq a$, $0 \leq \phi \leq \beta$, cuyos límites son superficies conductoras en $\phi = 0$, $\rho = a$, y $\phi = \beta$, a potencial 0. A grandes distancias el potencial está determinado por cierta configuración de cargas o conductores a potencial fijo.

a) Determine el potencial usando coordenadas polares.

b) Conservando sólo los términos de menor orden calcule el campo eléctrico y las densidades de carga sobre las superficies del borde.

c) Para $\beta = \pi$, muestre que lejos del centro el campo eléctrico es uniforme y perpendicular a la superficie.

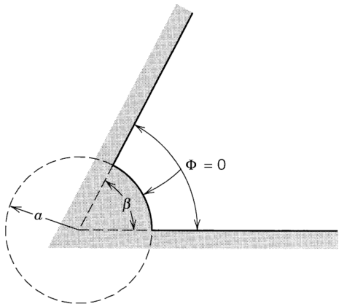

Figura 1: Ejercicio 9.

10. Considere el problema electrostático de la figura, definido en un sector limitado por un cono de ángulo β (se muestran los casos que $\beta < \pi/2$ y $\beta > \pi/2$, para este último se obtiene una punta).

a) Separe las variables (r, θ) en la ecuación de Laplace. Muestre que sólo están presentes en la solución las funciones de Legendre $P_\nu(\cos\theta)$ pero ν *no es necesariamente entero* [1].

b) Observe que los valores de ν están determinados por la condición $P_\nu(\cos\beta) = 0$. Obtenga la solución para el potencial del problema.

c) Calcule el campo eléctrico y estudie lo que sucede para $\beta > \pi/2$.

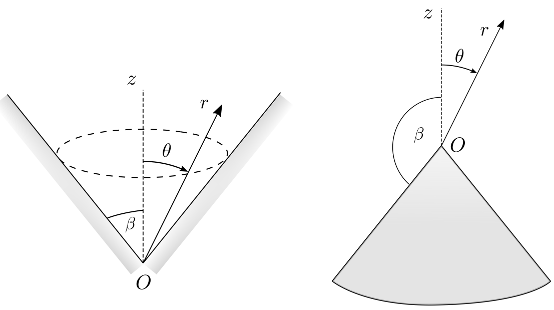

Figura 2: Ejercicio 10.

[1] Ver Jackson, sec. 3.4 (p. 104)

11. (Zanwill. Aplicación 8.2) Considere una carga puntual q ubicada a una distancia d fuera de un cilindro conductor de radio $R < d$ conectado a tierra. Usando la expresión en coordenadas cilíndricas $\mathbf{r} = (\rho, \phi, z)$ para la función de Green del problema de Dirichlet en el exterior del cilindro:

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} \cos\left[k(z-z')\right] \left[I_m(k\rho_<) - \frac{I_m(kR)}{K_m(kR)} K_m(k\rho_<)\right] K_m(k\rho_>),$$

a) Obtenga una expresión para el potencial fuera del cilindro.

b) Determine la fuerza sobre la carga.

c) Considere el límite $d >> R$. Usando la forma asintótica de las funciones de Bessel modificadas I_m y K_m obtenga una expresión para la contribución al potencial y a la fuerza. Observe que esta contribución proviene del término $m = 0$ en la serie.

d) Compare la expresión obtenida en c) para la fuerza con el resultado conocido (por ejemplo por le método de las imágenes) para una carga lejos de un plano conductor a tierra y de una esfera conductora a tierra.