Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Matemática Discreta
Año 2022

Práctico 3: Relaciones: generalidades y relaciones de equivalencia

1. Investigar si las siguientes relaciones son o no reflexivas, irreflexivas, simétricas, asimétricas, antisimétricas, transitivas.
   - sobre $\mathbb{N}$: ser la mitad de.
   - sobre el conjunto de las rectas de un plano: ser perpendicular a, ser paralela a.
   - para un universo $\mathcal{U}$ y un subconjunto fijo X de $\mathcal{U}$, definimos $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que si $A \subseteq \mathcal{U}$, $B \subseteq \mathcal{U}$ entonces $A\mathcal{R}B$ si $A \cap X = B \cap X$.
   - sobre $\mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y$ si $x - y$ es par
   - sobre $\mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y$ si $x + y$ es par.
   - idem anteriores cambiando par por impar.
   - sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si $a \leq c$.

2. Describir por extensión la relación $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} |\ x^2 + y^2 = 4\}$. Representarla en el plano. Luego, representar en el plano la relación $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ x^2 + y^2 = 4\}$.

3. Un relación en X se dice irreflexiva si para todo $x \in X$ se tiene $(x, x) \notin R$.
   a) Observar que irreflexiva implica no reflexiva, pero que el recí proco no es cierto.
   b) Probar que una relación es asimétrica si y sólo si es antisimétrica e irreflexiva.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

4. Averiguar cuáles relaciones del ejercicio 1 son de equivalencia.

5. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   a) Hallar $\sim$ una relación de equivalencia con la menor cantidad de elementos posible que contiene a los pares $(1, 2)$ y $(4, 5)$.
   b) Idem que el anterior para $(1, 2)$ y $(2, 5)$.
   c) Para la relación definida por la parte anterior, hallar [1], [2] y [3].

6. Consideramos la relación de congruencia módulo n en $\mathbb{Z}$: $a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b$ es multiplo de n.

a) Probar que $\equiv_n$ es una relación de equivalencia.

b) Probar que el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ tiene exactamente n elementos.

c) Probar que si $a \equiv_n a'$ y $b \equiv_n b'$, entonces:

- $a + b \equiv_n a' + b'$
- $a.b \equiv_n a'.b'$.

El punto b permite definir la suma y el producto en $\mathbb{Z}/\equiv_n$, mediante $[a] + [b] = [a + b]$ y $[a].[b] = [a.b]$.

7. Sea $f : X \to Y$ una función. Definimos la siguiente relación en X:

$$x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

a) Probar que $\sim_f$ es una relación de equivalencia.

b) Probar que la partición inducida por $\sim_f$ está en biyección con $Im(f)$.

8. Sea la relación en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ dada por $u \sim v$ si y sólo si $\exists\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $u = \lambda v$.

a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

b) Determinar cuáles son las clases de equivalencia y representar geométricamente una clase de equivalencia.

c) Elegir un representante de cada clase de forma que el conjunto de representantes elegido sea fácilmente representable geométricamente.

9. **Construcción del conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$**

a) Comparar los conjuntos $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ y $\mathbb{Z}$ (no se trata de dar una respuesta, sino de introducirse en el tema).

b) Definir una relación de equivalencia en $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ de manera tal que $\frac{\mathbb{N}\times\{0,1\}}{\sim}$ esté en biyección con $\mathbb{Z}$.

10. **Construcción del conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$**
Sobre $\mathbb{Z} \times Z \setminus \{0\}$, definimos la relación $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si $ad - bc = 0$.

a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Hallar las clases de $(1, 2)$ y de $(3, 1)$.

c) Comparar el conjunto cociente con $\mathbb{Q}$.

11. Sea la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ dada por $u \sim v$ si y sólo si $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. ¿Qué sucede con la representación geométrica de las clases de equivalencia en este caso?

RELACIONES DE ORDEN

12. Averiguar cuáles de las relaciones del ejercicio 1 del son de orden y, de estas, hallar cuáles son órdenes totales.

13. ¿Puede ser una relación de orden y de equivalencia a la vez?

14. Sea $\mathcal{R}$ la relación de ser divisor en $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

    a) Investigar si esta relación cumple cada una de las siguientes propiedades:
    a) Reflexividad   b) Irreflexividad   c) Simetría
    d) Asimetría   e) Antisimetría   f) Transitividad

    b) Probar que es una relación de orden. Probar que este orden no es total.

    c) Determinar los elementos minimales, mínimos, maximales y máximos de esta relación.

15. Sea $\leq$ un orden sobre A.

    a) Probar que el mínimo, si existe, es único.

    b) Probar que si a es mínimo entonces a es el único minimal y dar un ejemplo (de un conjunto ordenado A infinito) en que el recíproco no es cierto.

    c) Probar que si A es finito, el recíproco de la parte anterior es cierto.

    d) Probar para un orden total, todo minimal es mínimo.

16. Se dice que un orden sobre A es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío tiene mínimo.

    a) Observar que el orden usual de $\mathbb{N}$ es un buen orden y que el de $\mathbb{Z}$ no lo es.

    b) Probar que todo buen orden es total e investigar sobre la validez del recíproco.

    c) Definir un buen orden sobre $\mathbb{Z}$ y uno sobre $\mathbb{Q}$.

MATRIZ ASOCIADA A UNA RELACÓN

17. *a*) Determinar qué propiedades tiene la matriz asociada a una relación que sea
    a) reflexiva   b) simétrica   c) antisimétrica   d) asimétrica   e) transitiva