

ANUNCIOS

1- Primer evaluación corta: ¿Qué les pareció?

311 participantes en 476 inscriptos. Promedio: 1,96/3,50.

2.- 1er. Parcial: Viernes 13 de mayo hora 16:00. En forma presencial

3- Segunda evaluación corta: Desde jueves 21/4 al sábado 23/4.
Unidad 2 (cinemática).

4- Consultas: Clase de consultas: sábados de 9:00 a 10:30 por Zoom. Ver enlace en EVA.

Me voy a conectar 30 minutos antes de cada clase virtual por si tienen consultas a realizar, en todo caso puedo ampliar el rango o eventualmente poner una clase especial a coordinar.

5- La clase se va a grabar...



07 - Movimiento en dos dimensiones



Expulsión de lava de una erupción volcánica. Advierta las trayectorias parabólicas de las brasas proyectadas al aire. Todos los proyectiles siguen una trayectoria parabólica en ausencia de resistencia del aire. (© Arndt/Premium Stock/PictureQuest)

- **Desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones.**
- **Componentes del vector aceleración.**



Desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones

En el movimiento rectilíneo, la dirección y el sentido de un vector (velocidad o aceleración) se tiene en cuenta al especificar el signo: positivo o negativo.

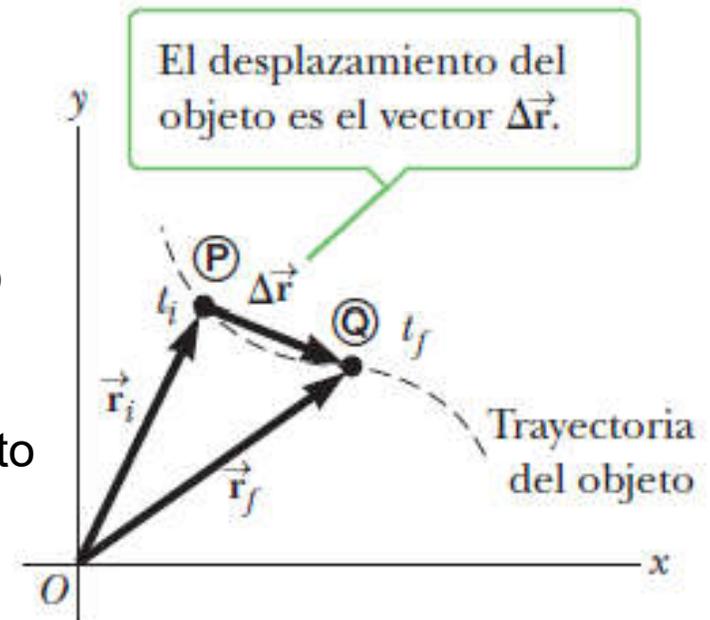
Por ejemplo, la velocidad de un cohete es positiva si éste va hacia arriba y negativa si va hacia abajo., mientras que g es negativo porque va hacia abajo.

En dos o tres dimensiones se debe hacer uso **completo del concepto vectorial**.

Un objeto se mueve a través del espacio como se muestra en la figura.

Cuando el objeto está en algún punto P en el tiempo t_i , su posición se describe mediante el **vector de posición \vec{r}_i** , dibujado desde el origen hasta P.

Cuando el objeto se ha movido hacia algún otro punto en el tiempo t_f , su vector de posición es \vec{r}_f .



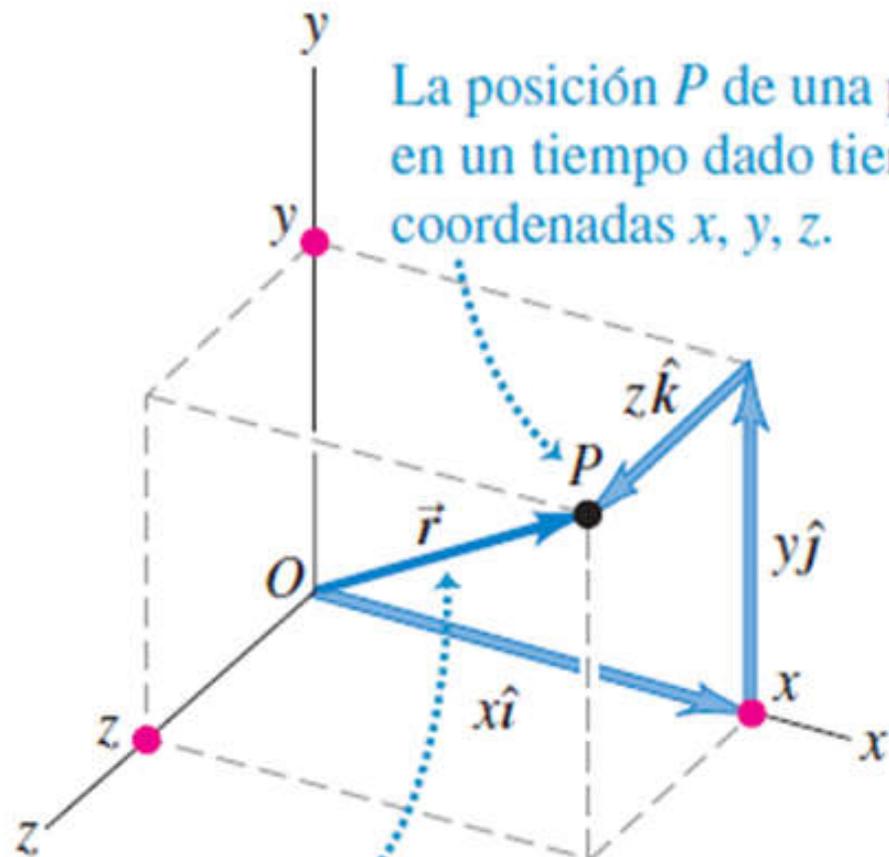
Del diagrama vectorial de la figura, el vector de posición final es la suma del vector de posición inicial y el desplazamiento $\Delta \vec{r}$:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \Delta \vec{r}$$

A partir de esta correspondencia, podemos redefinir las magnitudes físicas que vimos para el movimiento en una dimensión, en magnitudes vectoriales para movimiento en dos o tres dimensiones.

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Vector posición \vec{r} de una partícula en un instante dado es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto P . Coordenadas x , y y z de P son las componentes x , y y z del vector.



La posición P de una partícula en un tiempo dado tiene las coordenadas x , y , z .

El vector de posición del punto P tiene las componentes x , y , z :
 $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

$$\mathbf{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

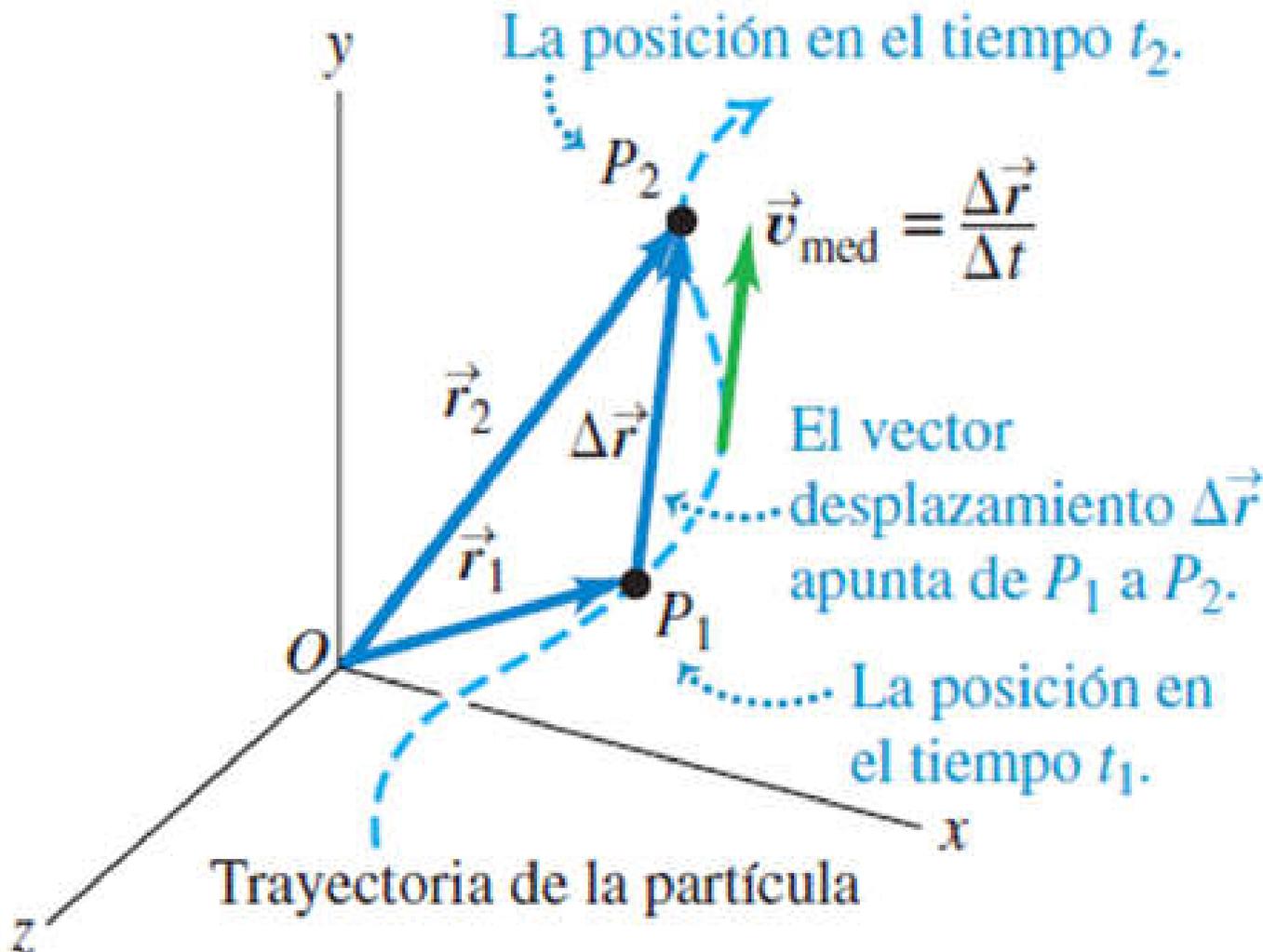
Vamos a extender las definiciones vistas en cinemática unidimensional de velocidades y aceleraciones medias e instantáneas al caso de dos y tres dimensiones. Pero ahora no trataremos a magnitudes escalares, sino vectoriales.

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

En un Δt la partícula se mueve de P_1 a P_2 .

Desplazamiento: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k}$$



Velocidad media

durante ese intervalo Δt :

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Rapidez media: es el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo insumido.

Es un escalar y no siempre coincide con el módulo de la velocidad media.

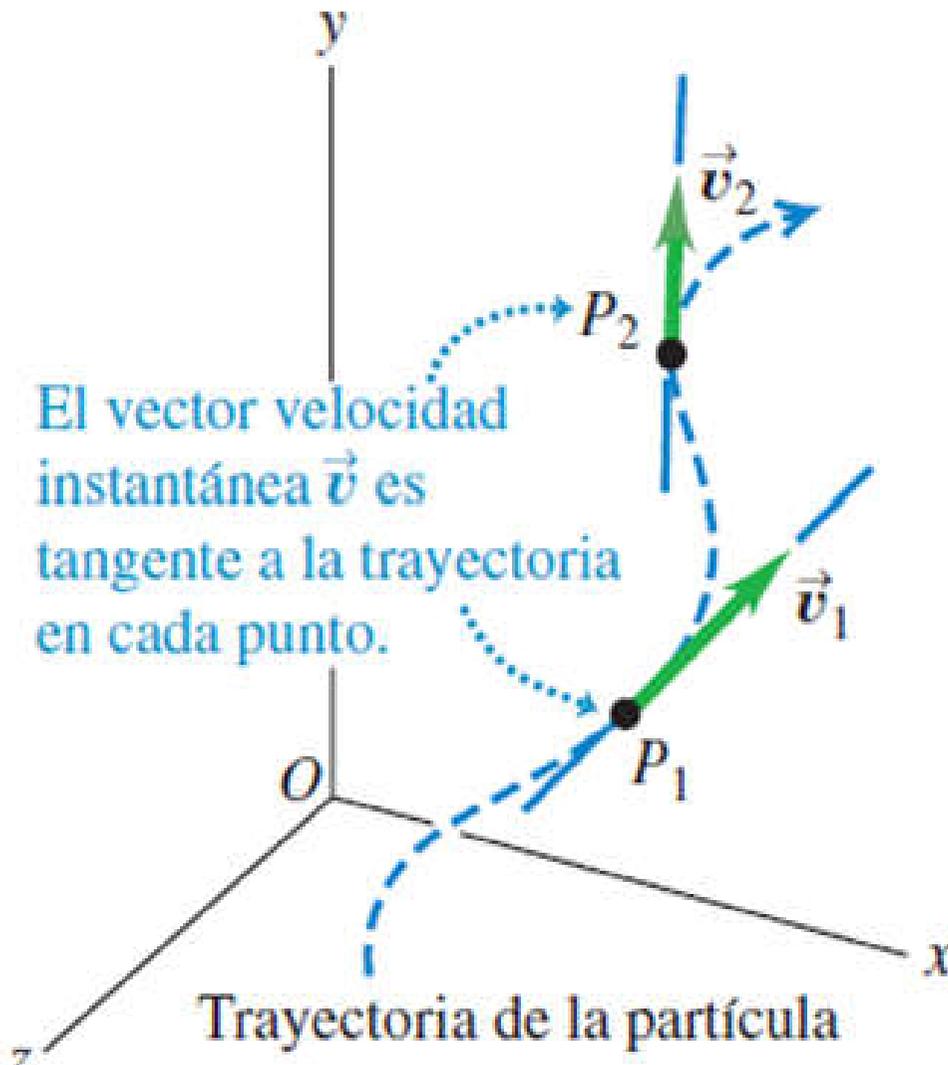
VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Definimos la **velocidad instantánea**:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$



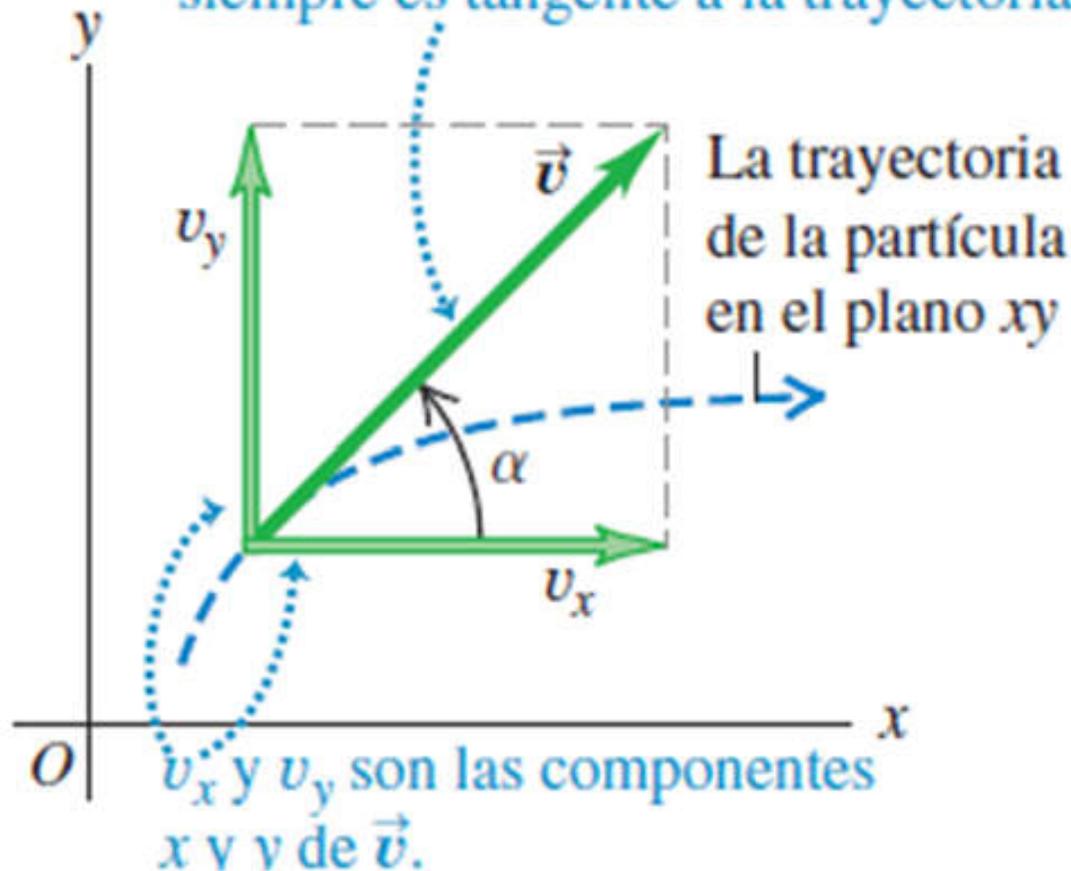
En cualquier punto de la trayectoria, el vector es tangente a la trayectoria en ese punto, y el sentido es el del movimiento.

El módulo de \vec{v} es la **rapidez**.

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

El vector velocidad instantánea \vec{v} siempre es tangente a la trayectoria.



En dos dimensiones:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

La dirección de la velocidad instantánea está dada por el ángulo α

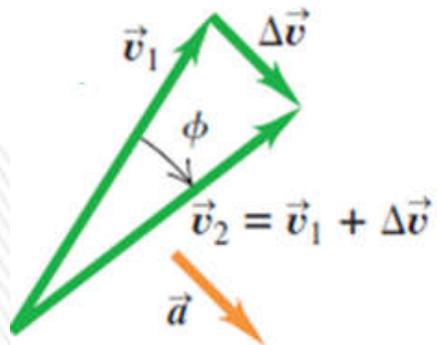
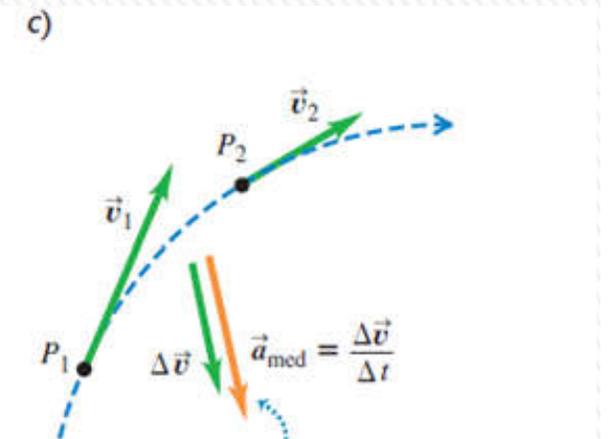
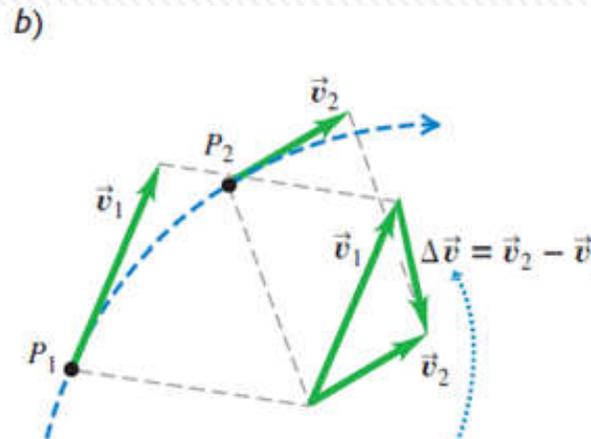
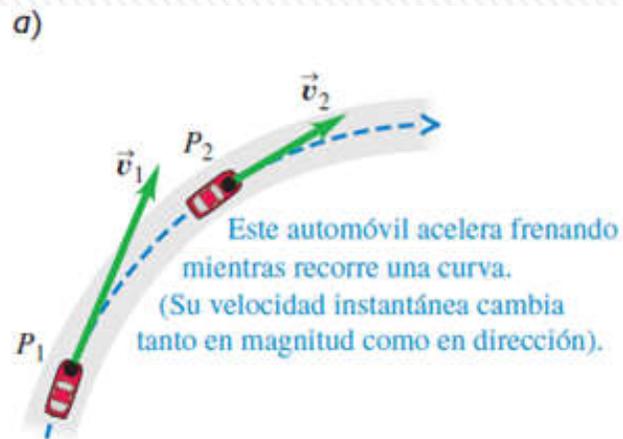
$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$



VECTOR ACELERACIÓN

La aceleración describe cómo cambia la velocidad.

Velocidad como vector: aceleración describe cambios *tanto en la magnitud de la velocidad (es decir, la rapidez) como en la dirección de la velocidad (la dirección en que se mueve la partícula).*

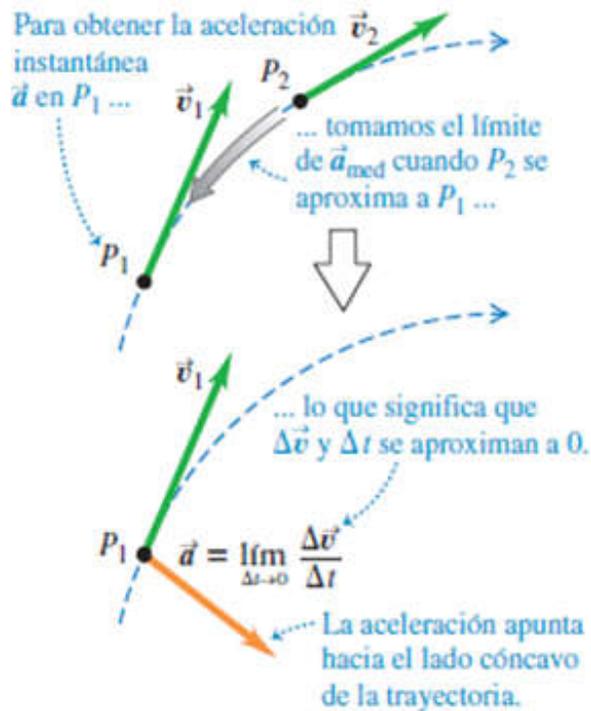


$$\bar{a}_{med} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

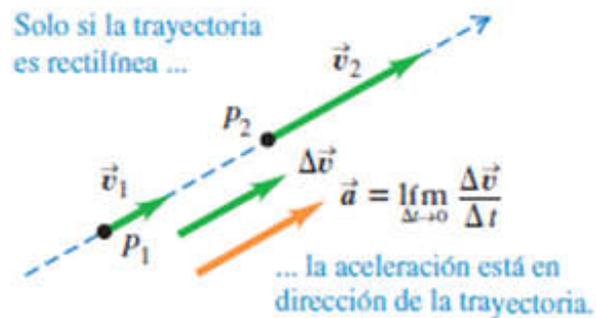
Definimos la **aceleración media**:

VECTOR ACELERACIÓN

a) Aceleración: trayectoria curva



b) Aceleración: trayectoria en línea recta



Definimos **aceleración instantánea**:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$

El vector \mathbf{a} no tiene que ser tangente a la trayectoria.

Si la trayectoria es curva, apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (interior de la curva descrita por la partícula).

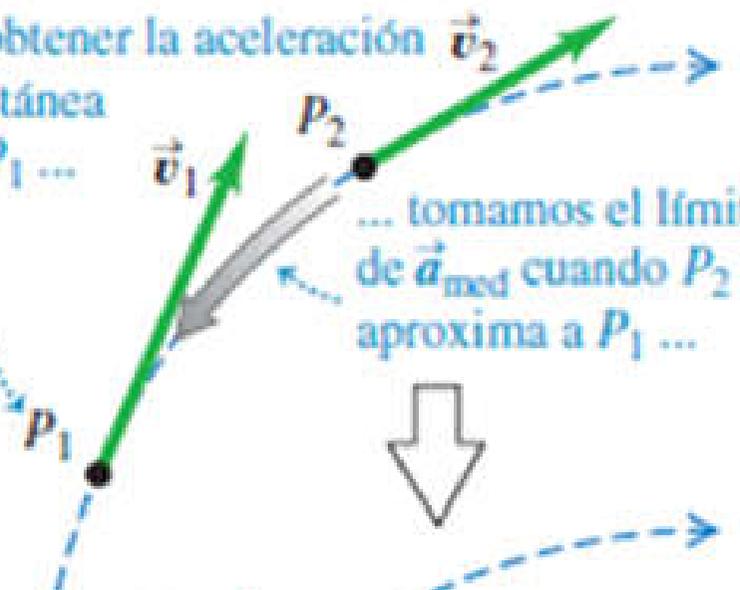
La aceleración es tangente a la trayectoria solo si la partícula se mueve en línea recta.

Atención: Cualquier partícula que sigue una trayectoria curva está acelerando !!!

VECTOR ACELERACIÓN

a) Aceleración: trayectoria curva

Para obtener la aceleración \vec{a} instantánea en P_1 ...



... tomamos el límite de \vec{a}_{med} cuando P_2 se aproxima a P_1 ...

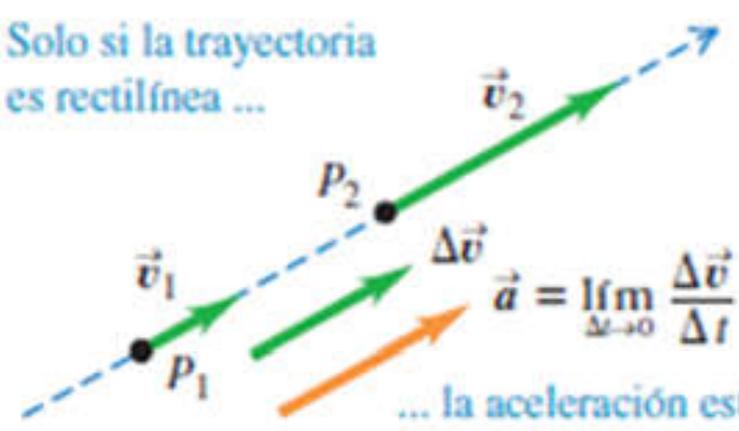
... lo que significa que $\Delta\vec{v}$ y Δt se aproximan a 0.

$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

La aceleración apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria.

b) Aceleración: trayectoria en línea recta

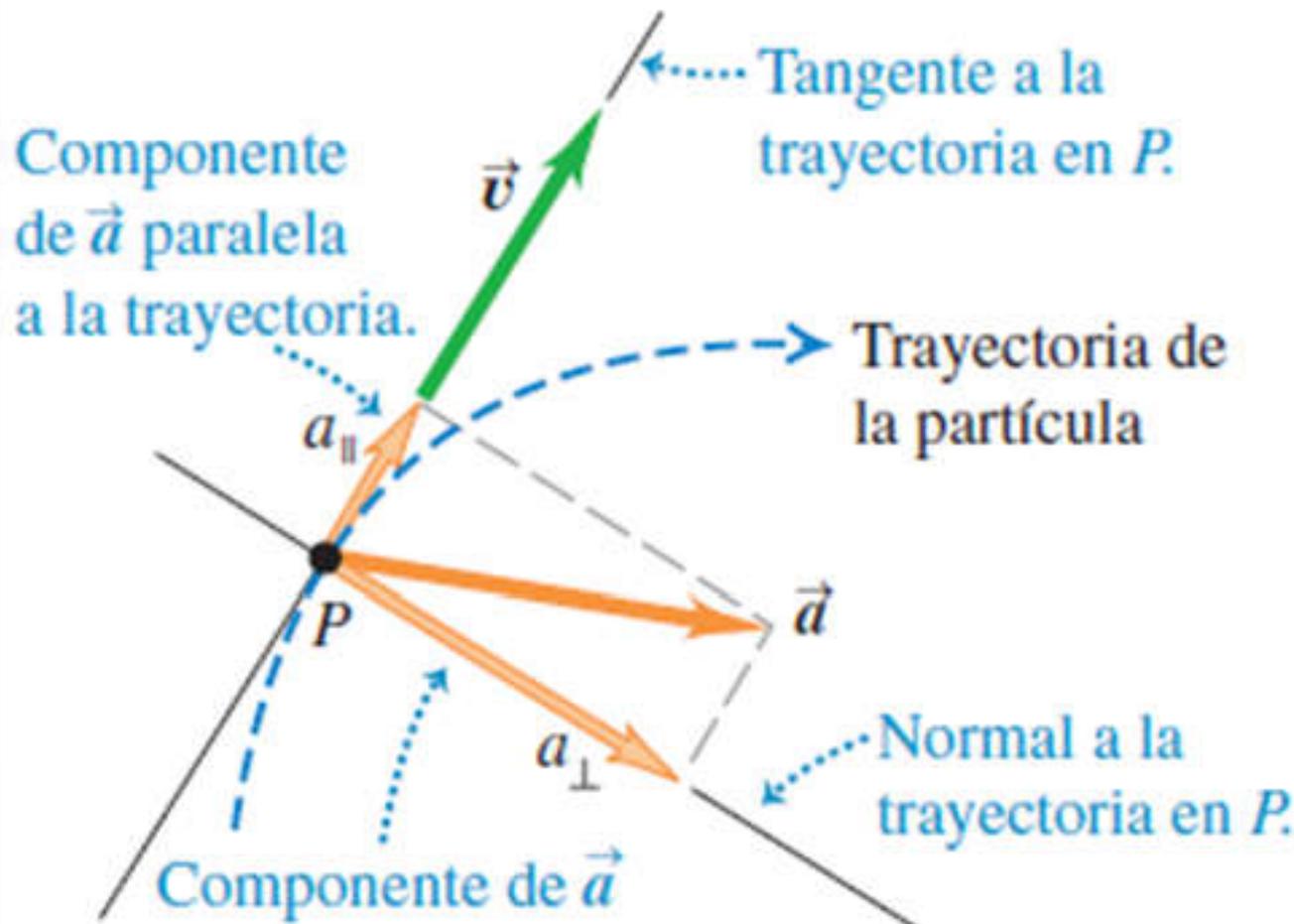
Solo si la trayectoria es rectilínea ...



$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

... la aceleración está en dirección de la trayectoria.

COMPONENTES PERPENDICULAR Y PARALELA DE LA ACELERACIÓN



El vector \vec{a} se puede visualizar en términos de una **componente paralela a la trayectoria de la partícula** (paralela a la velocidad), y otra **componente perpendicular a la trayectoria**, (perpendicular a la velocidad).

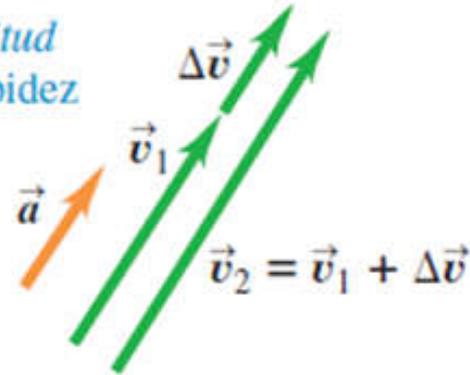
La **componente paralela** determina los **cambios en la rapidez** de la partícula.

La **componente perpendicular** indica los **cambios en la dirección del movimiento** de la partícula.

COMPONENTES PERPENDICULAR Y PARALELA DE LA ACELERACIÓN

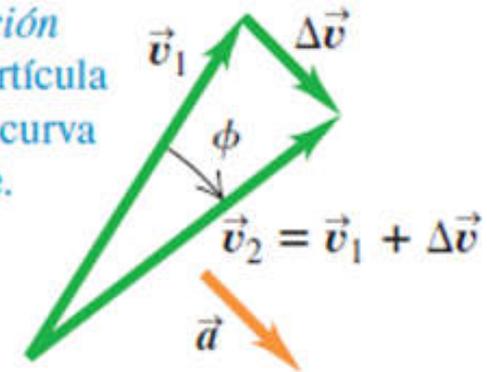
a) Aceleración paralela a la velocidad:

Solo cambia la *magnitud* de la velocidad: la rapidez cambia, pero no la dirección.

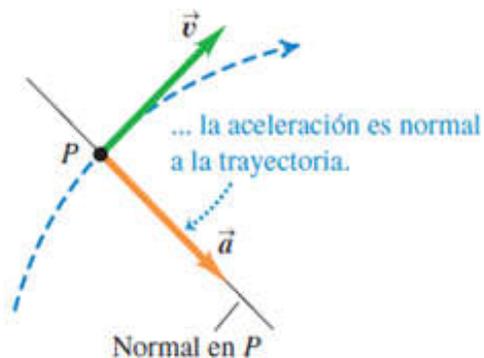


b) Aceleración perpendicular a la velocidad:

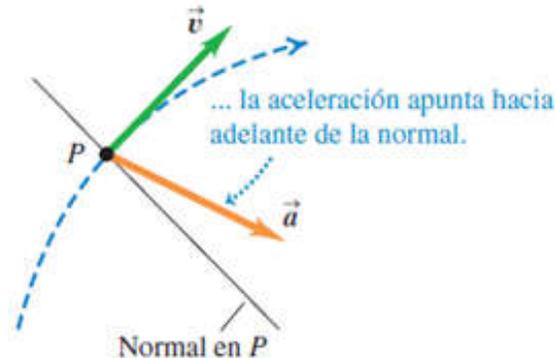
Solo cambia la *dirección* de la velocidad: la partícula sigue una trayectoria curva con rapidez constante.



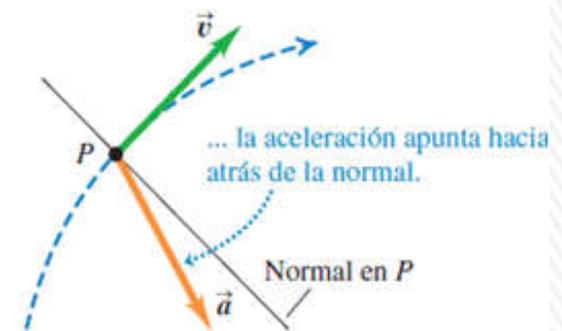
a) Cuando la rapidez es constante en una trayectoria curva ...



b) Cuando la rapidez se incrementa en una trayectoria curva ...



c) Cuando la rapidez disminuye en una trayectoria curva ...



Resumen: desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones

El **desplazamiento** de un objeto se define como el cambio en su vector de posición:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

La **velocidad media** de un objeto durante un intervalo de tiempo Δt es *su desplazamiento* dividido entre Δt :

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Como el desplazamiento es una cantidad vectorial y el intervalo de tiempo es una cantidad escalar, se concluye que la velocidad promedio es una cantidad *vectorial dirigida* a lo largo de $\Delta \vec{r}$

Cambio en el vector de posición de la partícula

Vector velocidad media de una partícula durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 .

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Intervalo de tiempo

Tiempo final menos tiempo inicial

Posición final menos posición inicial

Resumen: desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones

La **velocidad instantánea** de un objeto es el límite de su velocidad media cuando Δt *tiende a cero*.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

El vector velocidad instantánea de una partícula ...

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

... es igual al límite de su velocidad media cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero ...

... y es igual a la razón de cambio instantánea de su vector de posición.

La dirección del vector velocidad instantánea es el recorrido a lo largo de la línea tangente a la trayectoria del objeto y con el sentido de su movimiento. Obviamente las unidades de estas velocidades vectoriales en el S.I. son m/s.

La **aceleración media** de un objeto durante un intervalo de tiempo Δt es el *cambio de velocidad* $\Delta \vec{v}$ dividido entre Δt :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$$

Cambio en la velocidad de la partícula

Vector aceleración media de una partícula durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Intervalo de tiempo Tiempo final menos tiempo inicial

Velocidad final menos la velocidad inicial

Resumen: desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones

La **aceleración instantánea** de un objeto es el límite de su aceleración media cuando Δt tiende a cero.

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

El vector aceleración instantánea de una partícula ...

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

... es igual al límite de este vector aceleración media cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero ...

... y es igual a la razón de cambio instantánea de su vector velocidad.

ATENCIÓN:

Es importante reconocer que un objeto puede acelerar en diferentes formas:

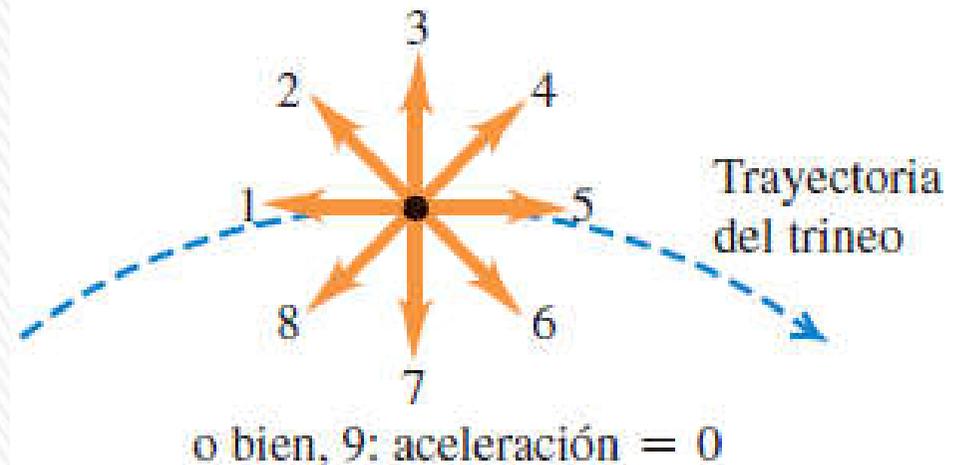
- 1) La magnitud del vector velocidad (la rapidez) puede cambiar con el tiempo.
- 2) La dirección del vector velocidad puede cambiar con el tiempo, incluso si la rapidez es constante, como puede suceder a lo largo de una trayectoria curva.
- 3) Tanto la magnitud y la dirección del vector velocidad pueden cambiar al mismo tiempo.

Preguntas

Un trineo viaja por la cima de una colina cubierta de nieve. El trineo disminuye su rapidez conforme asciende por un lado de la colina y la aumenta cuando desciende por el otro lado.

¿Cuál de los vectores (1 a 9) en la figura muestra correctamente la dirección de la aceleración del trineo en la cima?

(Considere el 9 como la aceleración cero). ■



3.2 Vector 7 En el punto más alto de la trayectoria del trineo, la rapidez es mínima. En ese punto, la rapidez no aumenta ni disminuye, y la componente paralela de la aceleración (es decir, la componente horizontal) es cero. La aceleración sólo tiene una componente perpendicular hacia el interior de la trayectoria curva del trineo. En otras palabras, la aceleración es hacia abajo

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

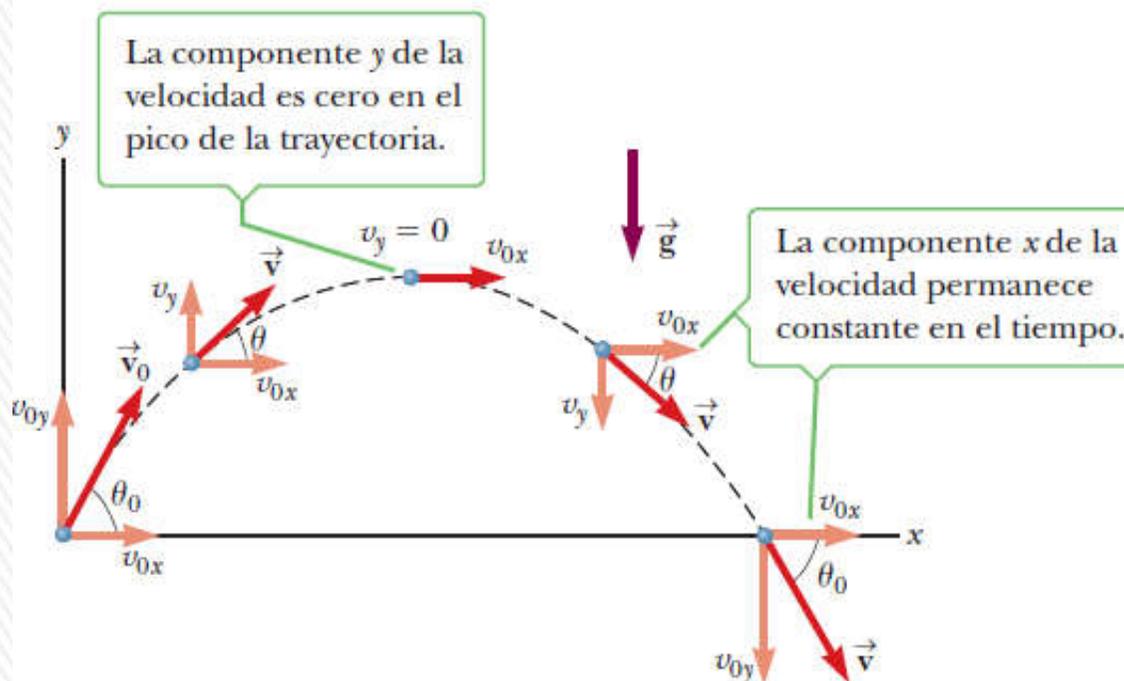
Veremos objetos que se mueven en las dos direcciones x y y de *manera simultánea bajo aceleración constante*.

Un caso especial importante de este movimiento en dos dimensiones se le conoce como **movimiento de un proyectil**.

Cualquiera que haya lanzado alguna clase de objeto en el aire ha observado un movimiento de un proyectil.

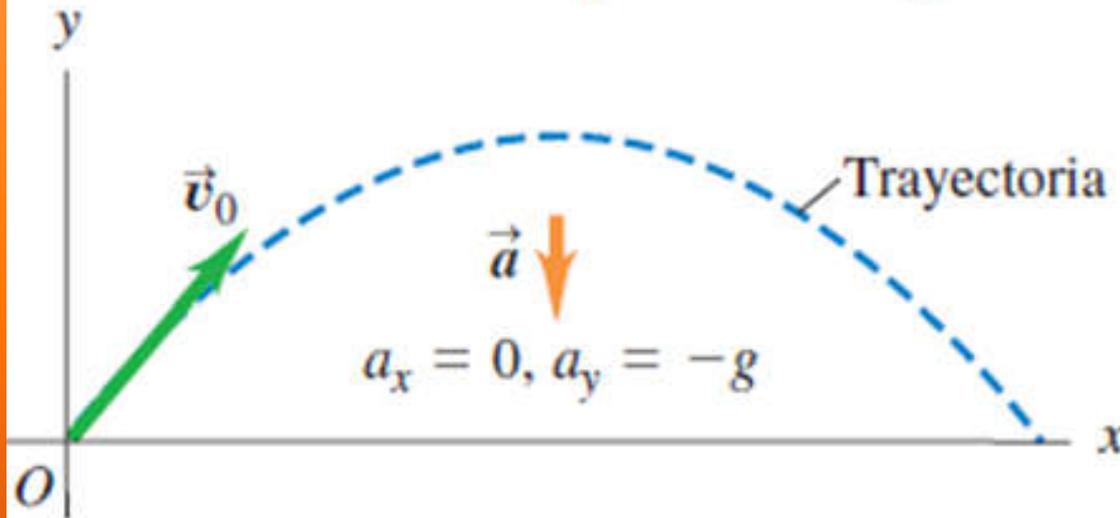
Si se omiten los efectos de la resistencia del aire, la variación de g con la altura y de su dirección y la rotación de la Tierra, la trayectoria del proyectil dentro del campo de gravedad de la Tierra es una curva en forma de **parábola**,

La figura muestra esta trayectoria. La dirección x *positiva es horizontal y hacia la derecha*, y la *dirección y es vertical y positiva hacia arriba*. El hecho experimental más importante acerca del movimiento de un proyectil en dos dimensiones es que **los movimientos horizontal y vertical son completamente independientes entre sí**.



MOVIMIENTO DE PROYECTILES

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que tiene un vector velocidad inicial \vec{v}_0 .
- Su trayectoria depende solo de \vec{v}_0 y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



Modelo:

- Proyectil como partícula.
- Aceleración gravedad constante tanto en magnitud como en dirección.
- Se ignoran efectos de la resistencia del aire, como curvatura y rotación de la Tierra.

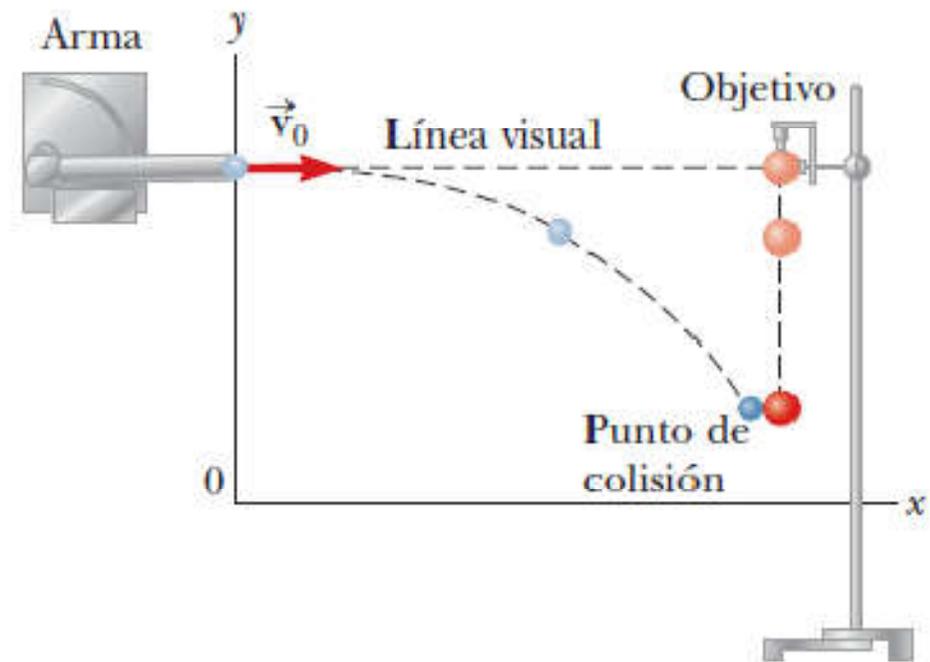
El movimiento del proyectil **siempre se limita a un plano vertical**, determinado por la dirección de la velocidad inicial. La aceleración gravitatoria es exclusivamente vertical y no puede acelerar al proyectil de forma lateral.

Movimiento es bidimensional.

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

El movimiento de un proyectil es la superposición de dos movimientos uno horizontal y otro vertical independientes entre sí, y el movimiento en una dirección no tiene efecto sobre el movimiento en la otra dirección.

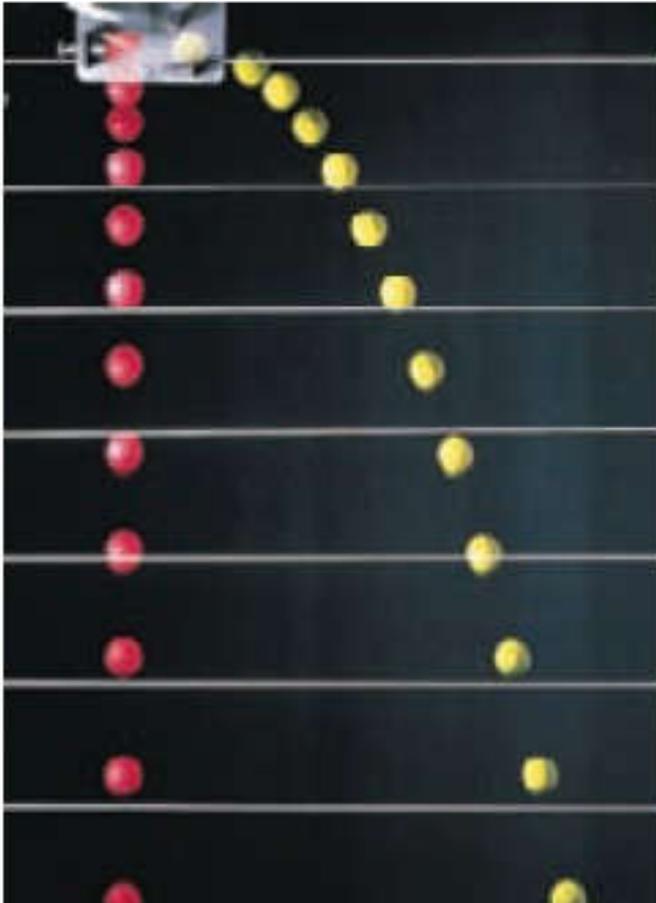
La figura muestra un experimento que ilustra la independencia del movimiento horizontal y vertical. La pistola apunta directamente a la bola objetivo y es disparada en el instante en que ésta es liberada. En ausencia de gravedad, el proyectil daría en el blanco porque el objetivo no se movería. Sin embargo, el proyectil aún da en el blanco en presencia de la gravedad.



Eso significa que el proyectil está cayendo con el mismo desplazamiento vertical que el objetivo, a pesar de su movimiento horizontal.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

3.16 La pelota roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante determinado, ambas pelotas tienen la misma posición y , velocidad y y aceleración y , a pesar de tener diferentes posición y velocidad en x .



Análisis del movimiento: trato por separado las coordenadas x y y .

Componente x de la aceleración es cero, y componente y es constante e igual a $-g$.

El movimiento de un proyectil es una combinación de:

- **movimiento horizontal con velocidad constante y ,**
- **movimiento vertical con aceleración constante.**



MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Ecuaciones de movimiento:

Como según x es un movimiento rectilíneo uniforme ($a_x=0$) y según y es un movimiento rectilíneo con aceleración constante ($a_y= -g$)

Aceleración: $a_x = 0$

$$a_y = -g$$

Velocidad: $v_x = v_{0x}$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Posición: $x = x_0 + v_{0x} t$

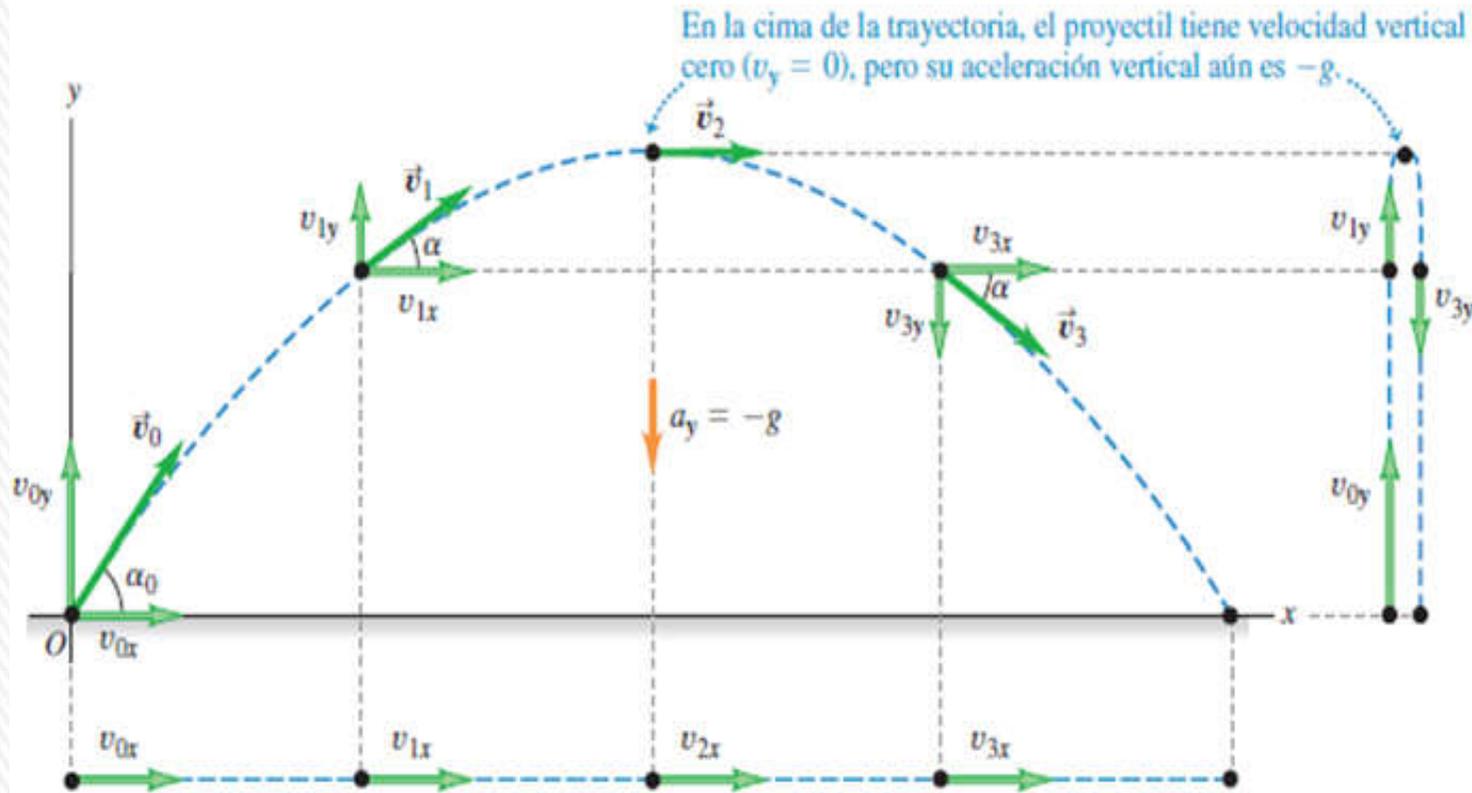
$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$$



MOVIMIENTO DE PROYECTILES



Verticalmente, el proyectil se encuentra en movimiento de aceleración constante en respuesta al tirón gravitacional de la Tierra. Así, su velocidad vertical *cambia* en cantidades iguales durante intervalos de tiempo iguales.

Horizontalmente, el proyectil se encuentra en movimiento de velocidad constante: su aceleración horizontal es cero, por lo que se mueve distancias en x iguales en intervalos de tiempo iguales.

Movimiento parabólico del modelo de proyectil



MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Otras expresiones:

Módulo del vector posición:

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Rapidez del proyectil (módulo de su velocidad):

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Dirección de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje +x:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

Ecuación de la trayectoria (parábola):

$$y(x) = (\tan \alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$$

Para lanzamiento con altura de lanzamiento igual al de llegada:

Tiempo en que se alcanza la altura máxima:

$$t^* = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

Altura máxima alcanzada:

$$h_{max} = y(t^*) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}$$

Alcance:

$$R = x(2t^*) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$$

Alcance máximo para $\alpha_0 = 45^\circ$

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Deducción de ecuación de la trayectoria: $y(x) = (\tan \alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$

$$x = v_0 \cos \alpha_0 t \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}$$

$$y = v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = v_0 \sin \alpha_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} \right)^2$$

$$y = \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{v_0 \cos \alpha_0} \right) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos \alpha_0)^2}$$

$$y = \tan \alpha_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$$

