Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico 3

1. Sean $u = (2, -1, -1)$, $v = (1, -2, 1)$.
   a) Hallar $||u||$, $||v||$ y el ángulo entre u y v.
   b) Hallar la proyección de v en la dirección de u.
   c) Hallar un vector w que sea coplanar con u y v, y ortogonal a u.
2. Sean u y v dos vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $||u|| = 3$ y el ángulo entre u y v es $\pi/4$.
   a) Hallar $||v||$ sabiendo que $u - v$ es perpendicular a u.
   b) Hallar $||v||$ y $||u + v||$ sabiendo que el ángulo entre $u + v$ y u es $\pi/6$.
3. Probar que para todo par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ valen
   a) $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2u \cdot v$. *Sugerencia:* recordar $||w||^2 = w \cdot w$, para todo $w \in \mathbb{R}^3$.
   b) $u \cdot v = \frac{1}{2}\left(||u + v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right)$ *identidad de polarización.*
   c) $(u + v) \cdot (u - v) = ||u||^2 - ||v||^2$;
   d) $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$ *ley del paralelogramo.* Interpretar geométricamente.
4. Sean u y v dos vectores tales que $||u|| = 3$, $||v|| = 4$ y $||u + v|| = 5$. Calcular $u \cdot v$ y el ángulo formado por u y v.
5. Hallar el ángulo que forman dos diagonales en un cubo.
6. Hallar dos versores que sean ortogonales simultáneamente a $u = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ y $v = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$.
7. Hallar el área del paralelogramo de vértices adyacentes $(1, -2, 3)$, $(2, 0, 1)$, $(0, 4, 0)$.
8. Probar que para todo par de vectores u, v, vale:
$$(u \cdot v)^2 + \|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2.$$
   Sugerencia: usar las definiciones "físicas" de los productos escalar y vectorial.
9. Probar:
$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w, \qquad \forall\, u, v, w.$$
   Nota: este ejercicio es optativo. Ver sugerencia en página siguiente.
10. Sean u, v, w tres vectores arbitrarios.
    a) Usar la fórmula del ejercicio anterior para probar la *identidad de Jacobi*:
$$u \times (v \times w) + w \times (u \times v) + v \times (w \times u) = 0.$$
    b) Deducir:
$$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w + v \times (u \times w).$$
    Esto muestra que el producto vectorial <u>no es asociativo</u>.
11. Calcular el volumen del paralelepípedo generado por $u = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$, $v = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ y $w = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.
12. Probar que el producto mixto es invariante por permutaciones circulares
$$u \cdot (v \times w) = w \cdot (u \times v) = v \cdot (w \times u), \qquad \forall\, u, v, w.$$
    Sugerencia: usar las propiedades de los determinantes[1].
13. Sabiendo que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}ah$, siendo a el área de la base y h la altura, calcular el volumen de la pirámide de vértices $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(-1, 0, -1)$, $(-1, -1, 1)$.

[1] Quienes no sepan trabajar con determinantes, pueden hacerlo después que estudiemos el tema.

Prueba de la fórmula

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w, \qquad \forall\ u, v, w. \tag{1}$$

Sean

$$u = (x_1, y_1, z_1), \quad v = (x_2, y_2, z_2), \quad w = (x_3, y_3, z_3).$$

Vamos a llamar

$$(x_0, y_0, z_0) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w, \quad (x_4, y_4, z_4) = v \times w, \quad (x_5, y_5, z_5) = u \times (v \times w).$$

Lo que tenemos probar es que vale $(x_0, y_0, z_0) = (x_5, y_5, z_5)$.

Empezamos por el lado derecho de (1).

1. Calcular $u \cdot w$ y $u \cdot v$ en función de las coordenadas de u, v y w.

2. Probar
$$x_0 = (u \cdot w)x_2 - (u \cdot v)x_3, \quad y_0 = (u \cdot w)y_2 - (u \cdot v)y_3, \quad z_0 = (u \cdot w)z_2 - (u \cdot v)z_3.$$

3. Usando las dos partes anteriores probar
$$x_0 = (y_1 y_3 + z_1 z_3)x_2 - (y_1 y_2 + z_1 z_2)x_3.$$
En forma análoga hallar y_0 y z_0. Ahora consideramos el lado izquierdo de (1).

4. Probar
$$(x_4, y_4, z_4) = \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right), \quad (x_5, y_5, z_5) = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_4 & x_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right).$$

5. Verificar el cálculo siguiente
$$x_5 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} = y_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - z_1 \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} = y_1(x_2 y_3 - y_2 x_3) - z_1(z_2 x_3 - x_2 z_3) = (y_1 y_3 + z_1 z_3)x_2 - (y_1 y_2 + z_1 z_2)x_3.$$
En forma análoga hallar y_5 y z_5.

Usando las partes 3 y 5, concluir que vale $(x_0, y_0, z_0) = (x_5, y_5, z_5)$.