Práctico 4

1. Hallar ecuaciones paramétricas y cartesianas de las siguientes rectas:
   a) pasa por el punto $(1, 2, 5)$ y es paralela al vector $(2, 1, 3)$;
   b) pasa por los puntos $(4, 3, 0)$ y $(1, 0, 1)$.

2. Sean P un punto y r una recta de ecuación vectorial $X = Q + tu$, en el espacio. Probar que la distancia[1] del punto P a la recta r es $d(P, r) = \frac{\|(P-Q)\times u\|}{\|u\|}$.

3. Sea $P = (x_0, y_0)$ y r la recta de ecuación $ax + by = c$, en el plano.
   a) Probar que la ecuación vectorial de r se puede escribir como $\begin{cases} (x, y) = (0, c/b) + t(-b, a), & \text{si } b \neq 0 \\ (x, y) = (c/a, 0) + t(-b, a), & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$.
   b) Usando el ejercicio 2, deducir $d(P, r) = \frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4. Hallar la distancia entre el punto P y la recta r, en los casos siguientes.
   a) $P = (1, 2, 1)$ y r es la recta de ecuación $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(3, 0, 4)$.
   b) $P = O$ (el origen) y r es la recta de ecuación $y + 1 = x = \frac{1-z}{2}$.
   c) $P = (1, 1)$ y r es la recta de ecuación $3x + 4y = 2$.
   d) $P = (3, 7)$ y r es la recta que pasa por el origen y es paralela al vector $2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$.
   e) $P = (2, 1)$ y r es la recta que pasa por $(4, 2)$ y $(10, 5)$.

5. Sean $r: \ X = P + tu$ y $s: \ X = Q + tv$ las ecuaciones vectoriales de dos rectas no paralelas.
   Probar que la distancia entre r y s es $d(r, s) = \frac{|(P-Q)\cdot(u\times v)|}{\|u\times v\|}$.

   Sugerencia: Sea n la perpendicular común a r y s. Definimos $P_0 := n \cap r$ y $Q_0 := n \cap s$. Sea Q_1 tal que P, P_0, Q_0, Q_1 son los vértices de un rectángulo. Sea Π el plano determinado por Q, Q_0, Q_1 y n' la paralela a n por P.
   a) Probar que n es paralela al vector $w := u \times v$.
   b) Probar que el plano Π es perpendicular a n'.
   c) Probar que la recta QQ_1 es perpendicular a n'.
   d) Deducir $d(r, s) = d(Q_0, P_0) = d(Q, n')$ y concluir $d(r, s) = \frac{|(P-Q)\cdot(u\times v)|}{\|u\times v\|}$.

6. Sean $r: \ X = P + tu$ y $s: \ X = Q + tv$ las ecuaciones vectoriales de dos rectas. Probar que r y s son coplanares si y solo si $(P - Q) \cdot (u \times v) = 0$. *Sugerencia:* distinguir según r y s son paralelas o no.

7. Se consideran las siguientes rectas
$$r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}, \qquad r_2: \ \frac{x-1}{2} = 2 - y = z - 1, \qquad r_3: \ (x, y, z) = (3, 1, 0) + t(1, 0, 1).$$
   a) Para cada par de esas rectas se pide investigar si son: paralelas, ortogonales[2] o coplanares.
   b) Hallar las distancias entre las rectas anteriores.

8. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes planos:
   a) Pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es paralelo a $u = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ y $v = \hat{\imath} - \hat{k}$.
   b) Pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$ y $(1, 1, -2)$;
   c) Pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y contiene a la intersección de los planos $x + y + z = -2$ y $x - y - z = 2$

[1] La *distancia* entre dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ se define como el ínfimo de las distancias entre los puntos de los conjuntos; en nuestro caso coincide con la distancia entre P y el pie de la perpendicular a r que pasa por P.
[2] Dos rectas se dicen *ortogonales* si lo son sus direcciones.

9. a) Hallar la ecuación vectorial de la intersección de los planos $2x-3y+4z=-1$ y $\begin{cases} x=2-t+s \\ y=-1-t+2s \\ z=-2-2t-s \end{cases}$.

   b) Hallar la intersección del plano $\begin{cases} x=2-t+s \\ y=-1-t+2s \\ z=-2-2t-s \end{cases}$ y la recta $\begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=-1-t \end{cases}$.

10. En los casos siguientes se pide hallar la intersección de los tres planos; cuando la intersección sea vacía, estudiar las intersecciones dos a dos. Interpretar geométricamente los resultados.

    a) $y+z=0,\ 2x-y-2z=5,\ 3x+3y+2z=7$.

    b) $x+2y-z=2,\ 2x+y-3z=0,\ -2x-4y+2z=3$.

    c) $x-2y+z=5,\ x+z=3,\ x+4y+z=0$.

11. Sean $\Pi :\ ax+by+cz=d$ y $\Pi' :\ a'x+b'y+c'z=d'$ las ecuaciones de dos planos. Probar:

    a) Π y Π' son paralelos si y solo si existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $a'=ka$, $b'=kb$ y $c'=kc$.

    b) Π y Π' son ortogonales[3] si y solo si $aa'+bb'+cc'=0$.

12. a) Sea Π el plano por Q perpendicular a n. Probar que la distancia de un punto P a Π es $d(P,\Pi)=\frac{|(P-Q)\cdot n|}{\|n\|}$.

    b) Sea $P=(x_0,y_0,z_0)$ y $\Pi :\ ax+by+cz=d$. Deducir que vale

$$d(P,\Pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

13. Hallar la distancia del origen al plano $x-y=3$, y del punto $(-2,-4,3)$ al plano $2x-y+2z=-3$.

14. Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(10,11,12)$ y no corta a ninguno de los planos de ecuaciones $x+y+z=1$, $x-y=3$.

15. Verificar que los siguientes planos son paralelos, y hallar la distancia entre ellos.

    a) $x-2y-2z=12$ y $-x+2y+2z=6$;

    b) $2x-3y+6z=14$ y $4x-6y+12z=-21$.

16. En cada caso, hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones especificadas.

    a) Pasa por el punto $(1,0,1)$ y es perpendicular al plano $2x+y+3z-1=0$.

    b) Pasa por el punto $(-1,2,-3)$, se intersecta con la recta $(x,y,z)=(1,-1,3)+t(3,2,-5)$ y es ortogonal a la recta $\begin{cases} x=-1+6t \\ y=-3-2t \\ z=2-3t. \end{cases}$

    c) Pasa por el punto $(-4,-5,3)$ e intersecta perpendicularmente a la recta $(x,y,z)=(-1,-3,2)+t(3,-2,-1)$.

17. En cada caso, hallar la ecuación del plano que satisface las condiciones especificadas:

    a) Pasa por $(2,-1,1)$, es perpendicular al plano $2x+3y-z+5=0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x=2z+3 \\ y=z. \end{cases}$

    b) Pasa por $(1,0,1)$ y es paralelo al plano $x+2y+z+1=0$.

    c) Pasa por $(1,1,1)$, es paralelo al eje Oy y forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje Ox (hay dos posibilidades).

18. Se consideran las rectas de ecuaciones $r_1 :\ \begin{cases} x=4-4t \\ y=5+4t \\ z=-2+t \end{cases}$, $\quad r_2 :\ \begin{cases} x=2+2t \\ y=5+2t \\ z=1-t \end{cases}$.

    a) Encontrar la perpendicular común a r_1 y r_2.

    b) Calcular la distancia entre r_1 y r_2, y hallar los puntos $P_1\in r_1$ y $P_2\in r_2$ tales que $d(P_1,P_2)=d(r_1,r_2)$.

[3] Dos planos se dicen *ortogonales* o *perpendiculares* (en este caso es lo mismo), si sus vectores normales son ortogonales.