**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

**Cálculo diferencial e integral I**
**Primer semestre 2022**

## Práctico 5: Integral de Riemann

**1.** Estimar el área bajo el gráfico de $f : D \to \mathbb{R}$ usando una partición $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $D$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \cos x, D = [-\pi/2, \pi/2], n = 4.$

b) $f(x) = \sqrt{x}, D = [0, 4], n = 6.$

Evalúe el error cometido al realizar la estimación, sabiendo que el valor exacto de dichas áreas es 2 y 16/3, respectivamente. ¿Cómo podría mejorar la estimación tomando el mismo valor de $n$?

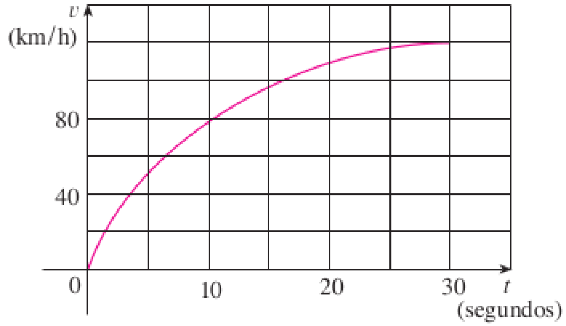
**2.** Estimar el área del círculo de radio 1 usando una función y una partición adecuadas, de forma que el error cometido sea menor que 0,1.

**3.** En la tabla de abajo se proporcionan datos de la velocidad del despegue del transbordador Endeavour[1] hasta el momento del desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido. Utilice estos datos para estimar la altura por arriba de la superficie de la Tierra a la que se encontró el Endeavour 62 segundos después del lanzamiento.

| Suceso | Tiempo ($s$) | Velocidad ($m/s$) |
|---|---|---|
| Lanzamiento | 0 | 0 |
| Inicio de maniobra de giro | 10 | 55 |
| Fin de maniobra de giro | 15 | 98 |
| Válvula de estrangulación a 89 % | 20 | 134 |
| Válvula de estrangulación a 67 % | 32 | 222 |
| Válvula de estrangulación a 104 % | 59 | 398 |
| Presión dinámica máxima | 62 | 434 |
| Separación de cohete auxiliar | 125 | 1245 |

**Nota**: La Válvula de estrangulación (o estrangulamiento), es la que permite intercambiar gases y combustible para hacer posible la combustión en un motor, y es la traducción que usamos para el dispositivo análogo que hace posible la propulsión del cohete; en la tabla, el valor 104 % indica en realidad una cierta configuración en la aceleración impuesta, que significa, en el caso del Endeavour, que alcanzó su máximo de combustión.

**4.** Se muestra la gráfica de la velocidad de un automóvil (en función del tiempo) que parte del estado de reposo hasta una velocidad de 120 km/h durante un periodo de 30 segundos. Estime la distancia recorrida durante este período.



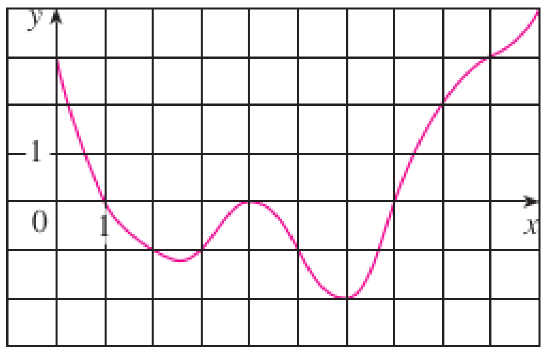

[1]Lanzado por primera vez en mayo 1992 para la misión STS-49

**5.** Hay una fuga del contenido líquido de un tanque a raíz de $f(t)$ litros por hora. En el transcurso de 10 horas los valores de $f(t)$ son los siguientes:

| $t$ (horas) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ (lts/h) | 8,2 | 7,6 | 6,8 | 6,5 | 5,4 | 5,1 |

Haga estimaciones por defecto y por exceso de la cantidad de líquido que se fugó.

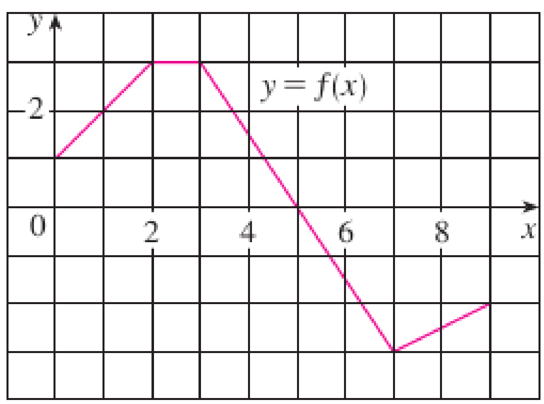
**6.** Se da la gráfica de la función $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ siguiente:




a) Calcule las sumas de Riemann superior e inferior utilizando la partición indicada por el cuadriculado.

b) Estime lo mejor que pueda el valor de $\int_0^{10} f(x)dx$ eligiendo una partición adecuada, y compare el resultado con lo obtenido en el inciso a).

**7.** Considere la función $f : [0, 9] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica es la siguiente:




Calcule las integrales

a) $\int_0^2 f(x)\,dx$;  b) $\int_0^5 f(x)\,dx$;  c) $\int_0^7 f(x)\,dx$;  d) $\int_0^9 f(x)\,dx$.

**8.** Utilizando la propiedad del valor medio para integrales estime por defecto y por exceso las siguientes integrales:

a) $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$;

b) $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}\, dx$;

**9.** Utilizando la fórmula de Barrow calcule $\int_a^b f(x)dx$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x, a = 0, b = \pi/2$;

b) $f(x) = 1 + \tan^2 x, a = 0, b = \pi/3$;

c) $f(x) = \frac{1}{1+x}, a = 0, b = 1$;

d) $f(x) = 2xe^{x^2}, a = -1, b = 0$;

e) $f(x) = x^3, a = -1, b = 1$;

f) $f(x) = (2x+1)^3, a = -1/2, b = 0$;

g) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, a = 0, b = \sqrt{3}/2$;

h) $f(x) = 1 + x^2 - e^x, a = 0, b = 1$.

**Ejercicios opcionales**

**10.** Demuestre cada una de las siguientes desigualdades:

$$\int_1^3 \sqrt{1+x^4}\, dx \geq \frac{26}{3}, \quad \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx \leq \frac{\pi^3}{24}.$$

**11.** Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde $\mathbb{Q}$ designa el conjunto de los números racionales. Probar qur $f$ no es integrable[2]

[2]Recordar: $f$ integrable si para toda partición $P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tal que $\Delta x_i = (b-a)/n$ para todo $i = 1, \ldots, n$, y toda elección de puntos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ existe y su valor no depende de dicha elección.