Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal I (Física)

Examen. 30/07/18.

El examen dura 4 horas y consta de dos pruebas, primero una prueba teórica de 1 hora y luego una práctica de 3 horas. Para aprobar el examen se exige un mínimo de 30 puntos en la prueba práctica y 50 puntos en la suma de las dos.

Teórico - 40 puntos.

1. **(12 puntos)**
   a) Deducir la ecuación cartesiana del plano que pasa por un punto P y es perpendicular a una dirección $v \neq 0$.
   b) Deducir la ecuación cartesiana del plano que pasa por un punto P y es paralelo a dos vectores no colineales u y v.

2. **(15 puntos)** En este ítem no se pueden usar determinantes.
   a) Definir matriz invertible.
   b) Probar que si una matriz cuadrada tiene una fila formada solo por ceros, entonces la matriz no es invertible.
   c) Probar que una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

   es invertible si y solo si $a_i \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

3. **(13 puntos)**. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
   a) Probar que T es inyectiva si y solo si $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$.
   b) Probar que si T es inyectiva y $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un subconjunto LI de V, entonces $T(\mathcal{A}) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es un subconjunto LI de W.

Práctico - 60 puntos.

1. **(15 puntos)** Sean $r: \; X = P + tu$ y $s: \; X = Q + tv$ las ecuaciones vectoriales de dos rectas no paralelas.

   a) Hallar la ecuación del plano Π que contiene a s y es paralelo a r.

   b) Probar que r y s son coplanares si y solo si $(P - Q) \cdot (u \times v) = 0$.

   c) Probar que la distancia[1] entre r y s es $d(r,s) = \frac{|(P-Q)\cdot(u\times v)|}{\|u\times v\|}$.

2. **(15 puntos)** Discutir y resolver el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda x + y + z & = & 1 \\ x + (\lambda+2)y + z & = & 1 \\ 2x + 2y + (1-\lambda)z & = & 2 \end{array} \right. .$$

3. **(15 puntos)**. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$.

   a) Probar que $\mathcal{C} = \{1,\, x,\, 1+2x+x^2,\, 2+x-x^3\}$ es una base de V.

   b) Hallar las coordenadas de los vectores x^2 y x^3 en la base $\mathcal{C}$.

   c) Hallar las matrices de cambio de base ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}$ y ${}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$, siendo $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

4. **(15 puntos)**. En los casos siguientes investigar si la transformación lineal dada es un isomorfismo. En caso afirmativo hallar su inversa.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y) = (5x + 2y,\; 2x + y), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   b) $T : M_2 \to M_2$ definida por

$$T(A) = A + A^t, \qquad \forall A \in M_2.$$

   En la fórmula anterior A^t es la matriz traspuesta de A.

[1] La *distancia* entre dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ se define como el ínfimo de las distancias entre los puntos de los conjuntos.

Solución - práctico.

1. *a)* El vector $u \times v$ es ortogonal a u y v, luego todo plano ortogonal a $u \times v$ es paralelo a r y s. Si queremos que ese plano contenga a s, entonces alcanza con que contenga a un punto de s (por ser paralelo a s). Luego Π es el plano de ecuación $(X - Q) \cdot (u \times v) = 0$.

   b) Las rectas r y s son coplanares si y solo si r está contenida en Π, si y solo si P pertenece a Π (por ser Π paralelo a r), si y solo si $(P - Q) \cdot (u \times v) = 0$.

   c) Como r es paralelo a Π, $P \in r$, $Q \in \Pi$ y $u \times v$ es ortogonal a Π, entonces la distancia entre r y s es el módulo de la proyección ortogonal de $P - Q$ en la dirección de $u \times v$, luego $d(r, s) = \frac{|(P-Q)\cdot(u\times v)|}{\|u\times v\|}$.

2. Aplicando el método de Cramer obtenemos

$$\Delta = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1), \quad \Delta_x = -(\lambda + 1)^2, \quad \Delta_y = (\lambda + 1)^2, \quad \Delta_z = -2(\lambda + 1)^2.$$

Luego,

- Si $\lambda \neq \pm 1$, el sistema es compatible determinado y la solución es

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda - 1}, \quad z = \frac{2}{1 - \lambda}.$$

- Si $\lambda = 1$, es $\Delta = 0$ y $\Delta_x = -4 \neq 0$, luego el sistema es incompatible.
- Si $\lambda = -1$, es $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Sustituyendo $\lambda = -1$ en el sitema original obtenemos

$$\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \\ 2x + 2y - 2z &= 2 \end{cases}.$$

  Luego en este caso el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad, y la solución se puede escribir de la forma $z = x + y - 1$, x e y libres.

3. *a)* Es fácil de probar que $\mathcal{C}$ es LI y al tener la misma cantidad de elementos que la dimensión de V, deducimos que es base.

   b) Vale

$$x^2 = -1 - 2x + \left(1 + 2x + x^2\right); \quad x^3 = 2 + x - \left(2 + x - x^3\right).$$

   Luego

$$\operatorname{coord}\left(x^2\right)_{\mathcal{C}} = (-1, -2, 1, 0), \quad \operatorname{coord}\left(x^3\right)_{\mathcal{C}} = (2, 1, 0, -1).$$

   c)

$$_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad _{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. *a)* Es $T = L_A$, siendo $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Como $\det A = 1$, entonces A es invertible y por lo tanto T es un isomorfismo. La inversa de A es $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Luego

$$T^{-1}(x, y) = L_{A^{-1}}(x, y) = (x - 2y,\ -2x + 5y), \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   b) El núcleo de T está formado por las matrices antisimétricas:

$$\operatorname{Ker}(T) = \{A \in M_2 :\ A = -A^t\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{smallmatrix}\right) :\ b \in \mathbb{R}\right\}.$$

   Como es $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$, deducimos que T no es inyectiva y por lo tanto no es un isomorfismo.