Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra lineal 1 (Física)
Primer semestre de 2018

Examen. 10/08/2018.

El examen dura 4 horas y consta de dos pruebas, primero una prueba teórica de 1 hora y luego una práctica de 3 horas. Para aprobar el examen se exige un mínimo de 30 puntos en la prueba práctica y 50 puntos en la suma de las dos.

Teórico - 40 puntos.

1. **(14 puntos)**.

   a) A partir de la fórmula del producto escalar $u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$, siendo θ el ángulo entre u y v, deducir que en coordenadas vale
   $$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

   b) Probar que si $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, entonces vale
   $$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w.$$

2. **(13 puntos)** En este ítem no se pueden usar determinantes.

   a) Definir matriz invertible.

   b) Probar que si $A, B, C \in M_n$ y $AB = AC$ con A invertible, entonces $B = C$.

   c) Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ una matriz arbitraria. Probar que si $ad - bc \neq 0$, entonces A es invertible y la inversa de A es
   $$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

3. **(13 puntos)**.

   a) Definir el núcleo y la imagen de una transformación lineal.

   b) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios que tienen la misma dimensión. Probar que T es inyectiva si y solo si T es sobreyectiva.

Práctico - 60 puntos

1. **(20 puntos)**.

   a) Sea r_0 la recta de ecuación paramétrica $X = R_0 + tu_0$ y P_0 un punto del espacio. Probar que la distancia del punto P_0 a la recta r_0 se puede calcular mediante
   $$d(P_0, r_0) = \frac{\|(P_0 - R_0) \times u_0\|}{\|u_0\|}.$$

   b) Sean Π el plano de ecuación $x - y + z = 1$ y el punto $P = (3, 3, 4)$.

      1) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por P y es ortogonal a Π.
      2) Hallar el punto Q de intersección de r con Π.
      3) Sea $R = (2, 0, 1)$. Hallar las ecuación de una recta s que verifique las condiciones siguientes:
         - s contiene al punto R;
         - s está contenida en el plano Π;
         - la distancia del punto Q a la recta s es $2\sqrt{5}$.

2. **(20 puntos)**. Se considera el espacio M_2 de las matrices cuadradas 2×2.

   a) Probar que
   $$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
   es una base de M_2.

   b) Hallar $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(A)$, siendo $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ una matriz arbitraria.

   c) Se considera la base canónica $\mathcal{C}$ de M_2 definida por
   $$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
   Hallar la matriz de cambio de base ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}$.

3. **(20 puntos)**. Se consideran las transformaciones lineales $T_1 : \mathbb{R}^3 \to M_2$ y $T_2 : M_2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por
   $$T_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & x + y \\ x + y + z & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b,\, b - c,\, c - d),$$
   para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2$. Se pide.

   a) Hallar el núcleo y la imagen de T_1 y T_2.

   b) Sean $S_1 = T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $S_2 = T_1 \circ T_2 : M_2 \to M_2$. Hallar fórmulas explícitas para
   $$S_1(x, y, z) = \cdots, \quad S_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \cdots$$

Nota: en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución.

Soluciones - Práctico

1. *a*) Sea Q_0 el pie de la perpendicular a r_0 que pasa por P_0, y sea θ el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{R_0P_0}$ y $\overrightarrow{u_0}$. Entonces

$$d(P_0,r_0) = \|P_0 - Q_0\| = \|P_0 - R_0\| \operatorname{sen}\theta = \frac{\|P_0 - R_0\|\|u_0\| \operatorname{sen}\theta}{\|u_0\|} = \frac{\|(P_0 - R_0)\times u_0\|}{\|u_0\|}.$$

b) 1) Un vector normal a Π es $n = (1,-1,1)$, luego $r: \ (x,y,z) = (3,3,4) + t(1,-1,1)$.

2) $Q = (2,4,3)$.

3) Como s pasa por R, entonces su ecuación es de la forma

$$s: \ (x,y,z) = (2,0,1) + t(a,b,c),$$

siendo $u = (a,b,c)$ un vector no nulo. Para que s esté contenido en Π, como $R \in \Pi$, lo que tiene que pasar es que u sea ortogonal a n, es decir que se verifique $a - b + c = 0$.

Imponiendo la condición $d(Q,s) = 2\sqrt{5}$ obtenemos

$$2\sqrt{5} = d(Q,s) = \frac{\|(Q-R)\times u\|}{\|u\|} \ \Leftrightarrow \ \|(Q-R)\times u\|^2 = 20\|u\|^2.$$

Calculando obtenemos $(Q-R)\times u = 2(2c-b,a,-2a)$. Sustituyendo arriba obtenemos

$$4\left((2c-b)^2 + a^2 + 4a^2\right) = 20\left(a^2+b^2+c^2\right) \ \Leftrightarrow \ 4b^2 + 4bc + c^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ (2b+c)^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ c = -2b.$$

Sustituyendo $c = -2b$ en $a - b + c = 0$ deducimos $a = 3b$. Luego

$$u = (a,b,c) = (3b,b,-2b) = b(3,1,-2).$$

Tomando por ejemplo $u = (3,1,-2)$, obtenemos $s: \ (x,y,z) = (2,0,1) + t(3,1,-2)$.

2. *a*) Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ una matriz arbitraria. Queremos hallar $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo este ecuación obtenemos que tiene una única solución que es

$$a = x - y, \quad b = y - z, \quad c = z - t, \quad d = t. \tag{1}$$

Esto prueba que $\mathcal{B}$ es base de M_2.

b) De la fórmula (1) deducimos $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(A) = (x-y,\ y-z,\ z-t,\ t)$.

c) Usando la fómula para $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(A)$, deducimos ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. *a*)

$$\operatorname{Ker}(T_1) = \{(0,0,0)\}, \qquad \operatorname{Im}(T_1) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) : \ a,b,c \in \mathbb{R}\right\},$$

$$\operatorname{Ker}(T_2) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}\right) : \ a \in \mathbb{R}\right\}, \qquad \operatorname{Im}(T_2) = \mathbb{R}^3.$$

b) $S_1(x,y,z) = (-y,-z,x+y+z), \quad S_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ a-d & 0 \end{pmatrix}.$