Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra lineal 1 (Física)
Primer semestre de 2018

Prueba 2. 26/05/2018.

Teórico - 6 puntos

1. **(2 puntos)**. Deducir la ecuación cartesiana del plano que pasa por un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralelo a dos vectores no colineales $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$.

2. **(2 puntos)**.

   a) Definir qué es que una matriz cuadrada sea invertible.

   b) Probar si una matriz tiene una fila formada solo por ceros, entonces no es invertible.

3. **(2 puntos)**. Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ una matriz arbitraria. Probar que si $ad - bc \neq 0$, entonces A es invertible y la inversa de A es
$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Nota: En esta prueba <u>no se pueden usar determinantes</u>.

Práctico - 19 puntos

1. **(7 puntos)**.

   a) Usando las propiedades del producto escalar, probar que para todo par de vectores u, v, valen las siguientes igualdades:

   $$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2u \cdot v; \qquad ||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right).$$

   b) Dados dos vectores u y v tales que $||u|| = 2$, $||v|| = 3$ y $||u+v|| = \sqrt{19}$, determinar su producto escalar $u \cdot v$ y el ángulo formado por u y v.

2. **(6 puntos)**.

   a) Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes planos:

      1) el que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es paralelo a $u = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $v = \mathbf{i} - \mathbf{k}$.

      2) el que pasa por el punto $(1,1,1)$ y contiene a la recta $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-y-z=2 \end{cases}$.

   b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (1,0,-2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $2x - 3y + 5z = 1$.

3. **(6 puntos)**. Trabajamos con matrices 2×2.

   a) Encontrar un ejemplo de una matriz $A \neq \pm I$ tal que $A^2 = I$ (I es la matriz identidad).

   b) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (indicando por qué) o falsas (dando un contraejemplo).

      1) Si $A, B \in M_2$ y $AB = 0$ (la matriz nula) entonces: $(A+B)^2 = A^2 + BA + B^2$.

      2) Sea $P = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Si $X \in M_2$ verifica $PX = 0$, entonces $X = 0$.

   En lo anterior es (por definición) $A^2 = AA$, para toda matriz $A \in M_2$.

Nota: en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución.

Soluciones - Práctico

1. *a)* La primer igualdad se deduce desarrollando

$$||u+v||^2 = (u+v)\cdot(u+v) = \cdots .$$

   A partir de la fórmula para $||u+v||^2$ se deduce

$$||u-v||^2 = ||u+(-v)||^2 = \cdots = ||u||^2 + ||v||^2 - 2u\cdot v.$$

   La fórmula para $||u+v||^2 + ||u-v||^2$ se obtiene sumando las dos anteriores.

   b) Usando la primer fórmula para $||u+v||^2$ obtenemos $u\cdot v = 3$. Entonces si θ es el ángulo formado por u y v, es

$$\cos(\theta) = \frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{2}\,.$$

   Luego $\theta = \frac{\pi}{3}$.

2. *a)* 1) $x + 3y + z = 5$.
   2) $4x - y - z = 2$.

   b) $(x, y, z) = (1, 0, -2) + t(2, -3, 5)$.

3. *a)* Un ejemplo es $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

   b) 1) Es verdadera:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 0 + BA + B^2 = A^2 + BA + B^2.$$

   2) Es falsa: las matrices X que verifican $PX = 0$ son de la forma $X = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 2x & 2y \end{smallmatrix}\right)$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Alcanza con tomar $x \neq 0$ o $y \neq 0$ para que sea $X \neq 0$.