Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra lineal 1 (Física)
Primer semestre de 2018

Prueba 3. 23/06/2018.

Teórico - 6 puntos

Trabajamos siempre dentro de un espacio vectorial V.

1. **(2 puntos)**.
   a) Definir conjunto linealmente dependiente (LD).
   b) Probar que si un conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es LD ($n \geq 2$), entonces existe algún vector v_i que es combinación lineal de los restantes $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$.

2. **(2 puntos)**. De las dos afirmaciones siguientes, una es verdadera y la otra es falsa. Indicar cual es la falsa y dar un ejemplo que lo demuestre
   - Si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es LI y v_{n+1} es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$, entonces el conjunto $\{v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$ es LI.
   - Si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es LI y v_{n+1} no es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$, entonces el conjunto $\{v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$ es LI.

3. **(2 puntos)**.
   a) Definir base del espacio V.
   b) Sea $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un subconjunto LI de V y supongamos que la dimensión de V es n. Como la cantidad de elementos de un conjunto LI siempre es menor o igual que la de un conjunto generador, sabemos que es $m \leq n$. Probar que si $m = n$, entonces $\mathcal{A}$ es base de V.

Práctico - 19 puntos

1. **(7 puntos)**. Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Se pide.

   a) Estudiar su invertibilidad.

   b) En caso de ser invertible, hallar su inversa.

2. **(6 puntos)**. Utilizando el método de Cramer, discutir y resolver el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro λ:

$$\begin{cases} 2x + \lambda y &= 1 \\ (\lambda + 2)x + 4y &= 2 \end{cases}.$$

3. **(6 puntos)**. En los casos siguientes determinar si el conjunto es LI o LD. En caso de ser LD escribir uno de sus vectores como combinación lineal de los restantes.

   a) $\mathcal{A} = \{1 + x + x^2,\ 1 - x^2,\ 2 + x + x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.

   b) $\mathcal{B} = \{2 + x - 3x^2,\ -1 + 2x + 2x^2,\ -4 + 3x + 7x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.

Nota: en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución.

Soluciones - Práctico

1. *a)* La matriz A es invertible y la B no lo es.

   b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Vale

$$\Delta = -(\lambda + 4)(\lambda - 2), \quad \Delta_x = 2(2 - \lambda), \quad \Delta_y = 2 - \lambda.$$

Entonces:

- si $\lambda \neq -4, 2$, el sistema es compatible determinado y la solución es

$$x = \frac{2}{\lambda + 4}, \quad y = \frac{1}{\lambda + 4};$$

- si $\lambda = -4$, es $\Delta = 0$ y $\Delta_y = 6 \neq 0$, luego el sistema es incompatible;
- si $\lambda = 2$, el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad, y su solución es $x = -y + \frac{1}{2}$, y está libre.

3. El conjunto $\mathcal{A}$ es LI y el $\mathcal{B}$ es LD. Vale

$$\left(2 + x - 3x^2\right) - 2\left(-1 + 2x + 2x^2\right) + \left(-4 + 3x + 7x^2\right) = 0.$$

Luego una solución es

$$2 + x - 3x^2 = 2\left(-1 + 2x + 2x^2\right) - \left(-4 + 3x + 7x^2\right).$$