Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra lineal 1 (Física)
Primer semestre de 2018

Prueba 4 (julio). 30/07/2018.

Teórico - 6 puntos

1. **(3 puntos)**. Sea V un espacio vectorial arbitrario de dimensión 2 y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ y $\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$ dos bases ordenadas de V.

   a) Definir la matriz de cambio de base ${}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$.

   b) Probar que si $v \in V$ es un vector arbitrario, entonces vale

   $$\mathrm{coord}_{\mathcal{C}}(v) = {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\, \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v),$$

   siendo "coord" las coordenadas del vector en la base respectiva.

2. **(3 puntos)**. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

   a) Probar que T es inyectiva si y solo si $\mathrm{Ker}\,(T) = \{0\}$.

   b) Probar que si T es inyectiva y $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un subconjunto LI de V, entonces $T(\mathcal{A}) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es un subconjunto LI de W.

Prueba 4 (julio). 30/07/2018.

Práctico - 19 puntos

1. **(6 puntos)**. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$.

   a) Probar que $\mathcal{C} = \{1,\ x,\ 1+2x+x^2,\ 2+x-x^3\}$ es una base de V.

   b) Hallar las coordenadas de los vectores x^2 y x^3 en la base $\mathcal{C}$.

   c) Hallar las matrices de cambio de base $_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}$ y $_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$, siendo $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

2. **(7 puntos)**.

   a) Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definida por

   $$T(x,y,z) = (x+y+2z,\ y+z,\ x+z,\ x+y+2z), \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

   b) Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$, definida por

   $$T(a,b,c) = a+2b+3c+(a+2b)x, \qquad \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

   Investigar la inyectividad y la sobreyectividad de T.

3. **(6 puntos)**. En los casos siguientes investigar si la transformación lineal dada es un isomorfismo. En caso afirmativo hallar su inversa.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

   $$T(x,y) = (5x+2y,\ 2x+y), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   b) $T : M_2 \to M_2$ definida por

   $$T(A) = A + A^t, \qquad \forall A \in M_2.$$

   En la fórmula anterior A^t es la matriz traspuesta de A.

Nota: en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución.

Soluciones - Práctico

1. *a*) Es fácil de probar que $\mathcal{C}$ es LI y al tener la misma cantidad de elementos que la dimensión de V, deducimos que es base.

   b) Vale
$$x^2 = -1 - 2x + \left(1 + 2x + x^2\right); \quad x^3 = 2 + x - \left(2 + x - x^3\right).$$
   Luego
$$\operatorname{coord}\left(x^2\right)_{\mathcal{C}} = (-1, -2, 1, 0), \quad \operatorname{coord}\left(x^3\right)_{\mathcal{C}} = (2, 1, 0, -1).$$

   c)
$${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *a*) $\operatorname{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y = -z\}$, luego $\{(1, 1, -1)\}$ es base de $\operatorname{Ker}(T)$. Aplicando T a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ deducimos que el conjunto
$$\mathcal{A} = \{(1, 0, 1, 1), \ (1, 1, 0, 1), \ (2, 1, 1, 2)\}$$
   es un generador de $\operatorname{Im}(T)$. Observar que es $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(T) = 2$. Como $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ y $\mathcal{A}$ tiene 3 elementos, deducimos que hay uno de ellos que es combinación lineal de los restantes. Estudiando la dependencia lineal de $\mathcal{A}$ obtenemos que vale
$$(2, 1, 1, 2) = (1, 0, 1, 1) + (1, 1, 0, 1).$$
   Luego
$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1), \ (1, 1, 0, 1)\}$$
   es base de $\operatorname{Im}(T)$.

   b) $\operatorname{Ker}(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a = -2b, \ c = 0\}$, luego $\{(-2, 1, 0)\}$ es base de $\operatorname{Ker}(T)$ y por lo tanto $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$. Al ser $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$ deducimos que T no es inyectiva. Además
$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(T) = 2 = \dim \mathbb{R}_1[x].$$
   Luego $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}_1[x]$ y por lo tanto T es sobreyectiva.

3. *a*) Es $T = L_A$, siendo $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Como $\det A = 1$, entonces A es invertible y por lo tanto T es un isomorfismo. La inversa de A es $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Luego
$$T^{-1}(x, y) = L_{A^{-1}}(x, y) = (x - 2y, \ -2x + 5y), \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   b) El núcleo de T está formado por las matrices antisimétricas:
$$\operatorname{Ker}(T) = \{A \in M_2 : \ A = -A^t\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{smallmatrix}\right) : \ b \in \mathbb{R} \right\}.$$
   Como es $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$, deducimos que T no es inyectiva y por lo tanto no es un isomorfismo.