Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra lineal 1 (Física)
Primer semestre de 2018

Prueba 4 (agosto). 10/08/2018.

Teórico - 6 puntos

1. **(3 puntos)**.

   a) Definir las coordenadas de un vector en una base y la matriz de cambio de base entre dos bases.

   b) Probar que si una matriz cuadrada $A \in M_n$ verifica $Av = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ (v vector columna), entonces $A = I$.

   c) Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ dos bases de un mismo espacio V. Probar que la matriz de cambio de base ${}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$ es la inversa de la matriz de cambio de base ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}$.

2. **(3 puntos)**.

   a) Definir el núcleo y la imagen de una transformación lineal.

   b) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios que tienen la misma dimensión. Probar que T es inyectiva si y solo si T es sobreyectiva.

Práctico - 19 puntos

1. **(7 puntos)**. Se considera el espacio M_2 de las matrices cuadradas 2×2.

   a) Se sabe que
   $$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
   es una base de M_2. Hallar $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(A)$, siendo $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ una matriz arbitraria.

   b) Se considera la base canónica $\mathcal{C}$ de M_2 definida por
   $$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
   Hallar las matriz de cambio de base ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}$.

2. **(6 puntos)**. En cada uno de los casos siguientes investigar si existe una transformación lineal que verifique las condiciones dadas y en caso afirmativo hallarla.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que
   $$T(1,0) = 1, \quad T(0,1) = x, \quad T(1,1) = x^2.$$

   b) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que
   $$S(2,3) = (1,0,1), \quad S(1,2) = (0,1,0), \quad S(5,1) = (9,-13,9).$$

3. **(6 puntos)**. Se consideran las transformaciones lineales $T_1 : \mathbb{R}^3 \to M_2$ y $T_2 : M_2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por
   $$T_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & x+y \\ x+y+z & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b,\, b-c,\, c-d),$$
   para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2$. Se pide.

   a) Hallar el núcleo y la imagen de T_1 y T_2.

   b) Sean $S_1 = T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $S_2 = T_1 \circ T_2 : M_2 \to M_2$. Hallar fórmulas explícitas para
   $$S_1(x,y,z) = \cdots, \quad S_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \cdots$$

Nota: en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución.

Soluciones - Práctico

1. *a*) Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ una matriz arbitraria. Queremos hallar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo este ecuación obtenemos

$$a = x - y, \quad b = y - z, \quad c = z - t, \quad d = t.$$

Luego

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(A) = (x - y,\, y - z,\, z - t,\, t).$$

b) Usando la fómula para $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(A)$, deducimos

$${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *a*) Como $(1,1) = (1,0) + (0,1)$, si hubiese una tal transformación lineal T, entonces valdría

$$T(1,1) = T(1,0) + T(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x = x^2 \quad \lightning$$

b) Estudiando la dependencia lineal del conjunto obtenemos

$$9(2,3) - 13(1,2) - (5,1) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad (5,1) = 9(2,3) - 13(1,2).$$

Esta relación se preserva por S, es decir vale

$$S(5,1) = 9S(2,3) - 13S(1,2) \quad \Leftrightarrow \quad (9,-13,9) = 9(1,0,1) - 13(0,1,0).$$

Como el conjunto $\mathcal{B} = \{(2,3),(1,2)\}$ claramente es LI, entonces es base de $\mathbb{R}^2$. Luego existe una transformación lineal S que verifica las propiedades anteriores. Haciendo cuentas obtenemos

$$(x,y) = (2x - y)(2,3) + (-3x + 2y)(1,2),$$

luego

$$S(x,y) = (2x - y)S(2,3) + (-3x + 2y)S(1,2) = (2x - y)(1,0,1) + (-3x + 2y)(0,1,0).$$

Entonces $S(x,y) = (2x - y, -3x + 2y, 2x - y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. *a*)

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker}\,(T_1) = \{(0,0,0)\}, && \mathrm{Im}(T_1) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) :\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \\ &\mathrm{Ker}\,(T_2) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}\right) :\ a \in \mathbb{R} \right\}, && \mathrm{Im}(T_2) = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

b)

$$S_1(x,y,z) = (-y, -z, x + y + z), \quad S_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & a - c \\ a - d & 0 \end{pmatrix}.$$