Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2022

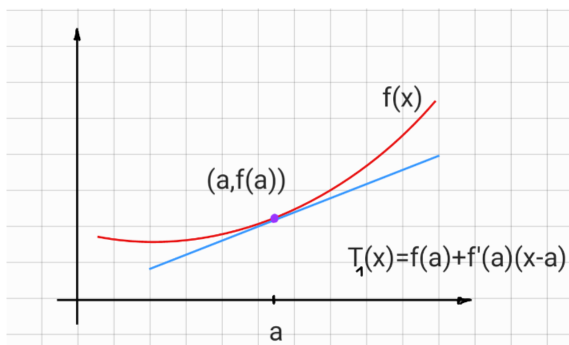
Polinomio de Taylor

En esta sección, vamos a estudiar cómo aproximar una función mediante un polinomio en el entorno de un punto.

Más precisamente, sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función definida en un entorno de un punto $a \in D$, esto es, existe $\delta > 0$ tal que $E(a, \delta) := (a - \delta, a + \delta)$ está contenido en el dominio D de f. Si f es derivable en a, entonces la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(a, f(a))$ es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Si anotamos $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, lo que representa una fución polinomial (o simplemente, un polinomio) de grado 1, vemos que las gráficas de f y T_1 tienden a coincidir en la medida que nos acercamos al punto a. De hecho, para x en un entorno pequeño del punto a, ambas funciones sólo coinciden en a (ver figura).



En otras palabras, si usamos $T_1(x)$ para estimar el valor de $f(x)$, el error que estamos cometiendo mediante dicha estimación es una función $R_1(x) := f(x) - P_1(x)$ que tiende a cero a medida que nos aproximamos de x. Más aún, como

$$\begin{aligned} \frac{R_1(x)}{x - a} &= \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a), \end{aligned}$$

deducimos

$$\lim_{x \to a} \frac{R_1(x)}{x - a} = 0.$$

Esto significa que $R_1(x)$ no sólo tiende a cero cuando x tiende a a, sino que lo hace “más rápido” que $x - a$.

Observemos que T_1 satisface $T_1(a) = f(a)$ y $T_1'(a) = f'(a)$. Como T_1 es un polinomio de grado 1, sus derivadas de órdenes $n \geq 2$ son identicamente nulas (o sea: son la función nula).

Vamos ahora a generalizar esto. Para ello, comenzaremos haciendo algunas consideraciones generales.

Sea $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i(x-a)^i = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n$ un polinomio de grado n, que como se ve, está escrito "en potencias $(x-a)$". Cabe señalar que todo polinomio de grado n puede escribirse de esta forma: en efecto, si $P_1(x) = B_1x + B_2$ es de grado 1, $P_1(x) = B_1(x-a+a) + B_2 = A_1(x-a) + A_2$, donde $A_1 = B_1$ y $A_2 = B_1a + B_2$; análogamente para grados mayores que 1, aunque las cuentas son más engorrosas (consulte el ejemplo 1.1(d), en donde se trabaja con un ejemplo de grado 3).

Vamos a calcular las funciones derivadas de P_n. Como se trata de un polinomio de grado n, ya sabemos que la (función) derivada de primer orden es un polinomio de grado $n-1$, la de segundo orden de grado $n-2$, ..., la de orden n es constante, y para órdenes superiores a n obtenemos la función nula.

Explícitamente,

$$P_1'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + \cdots + nA_n(x-a)^{n-1};$$

luego $P_1'(a) = A_1$. Análogamente,

$$P''(x) = 2A_2 + 2\cdot 3A_3(x-a) + \cdots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2};$$

y así $P_1''(a) = 2A_2$.

Repitiendo este procedimiento, podemos observar que $P^{(m)}(a) = m!A_m$, para todo $m \leq n$, donde $m!$ designa el llamado *factorial* de m.

Ejemplo 0.1. Si $P = (x-a)^n$, entonces todas las derivadas de orden menor que n se anulan en a y $P^{(n)}(x)$ es la función constante igual a $n!$.

Volviendo a nuestro objetivo, el de aproximar $f(x)$ por un polinomio de grado n, si tenemos en cuenta lo hecho en el caso $n = 1$, es razonable elegir un polinomio $T_n(x)$, escrito en potencias de $x-a$, tal que

$$T_n(a) = f(a), T_n'(a) = f'(a), \ldots, T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

En otras palabras, definimos

$$T_n(x) := \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

De hecho, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1. *(Taylor) Sean $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $n \geq 1$. Si la función derivada de orden n de f existe y es continua en un entorno de a, entonces*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

donde $R(x) := f(x) - T_n(x)$ satisface

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demostración. Para comenzar, observemos que por la manera en que definimos $T_n(x)$, el numerador del cociente en el enunciado del teorema es una función que se anula en a y cuyas derivadas de todos los órdenes $1, \ldots, n$ también se anulan en a.

Si escribimos $g(x) = R_n(x)$ y $h(x) = (x-a)^n$, tenemos que demostrar que el límite $\lim_{x\to a} g(x)/h(x)$ vale 0.

Como $g(a) = h(a) = 0$, la regla de L'Hôpital implica

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

De la misma forma, como $g'(a) = h'(a) = 0$, la misma regla implica

$$\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g''(x)}{h''(x)},$$

de donde deducimos la igualdad

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g''(x)}{h''(x)}.$$

Repitiendo el mismo procedimiento $n-2$ veces más, concluimos

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g^{(n)}(x)}{h^{(n)}(x)}.$$

Finalmente, $h^{(n)}(x)$ es constante igual a $n!$ y $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)$. Como $f^{(n)}(x)$ es una función continua en a, por hipótesis, deducimos que el límite de arriba es 0, como queríamos demostrar. $\square$

El polinomio $T_n(x)$ introducido arriba es el *polinomio de Taylor* de orden n de f en a. La función $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ es el *resto de Taylor* de orden n de f en a.

Observación. El teorema de Taylor afirma que si f admite derivada de orden n que es continua en un entorno de a, entonces el resto $R_n(x)$ tiende a cero más rápido que $(x-a)^n$. El resto $R_n(x)$ puede ser interpretado como el error cometido al aproximar $f(x)$ por $T_n(x)$; en particular, dicho error será tanto menor cuanto más próximo x esté de a.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos 1.1. (a) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f(0) = f''(0) = 0$ y $f'(0) = 1 = -f'''(0)$. Concluimos entonces

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \ \lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0.$$

Como $f^{(4)}(0) = 0$, entonces $T_3(x) = T_4(x)$ y $R_3(x) = R_4(x)$.

(b) Si $f(x) = e^x$, entonces $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$. Por lo tanto

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^2}{n!}, \ \lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n}.$$

(c) Si $f(x) = \sqrt{x}$, vamos a calcular $T_2(x)$ en el caso en que $a = 1$. Sabemos que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Entonces $f(1) = 1, f'(1) = 1/2, f''(1) = -1/4$. Deducimos

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2, \ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - T_2(x)}{x^n}.$$

(d) Sea $f(x) = 1 + x^3$. Entonces $f(0) = 1, f'(0) = f''(0) = 0$ y $f'''(0) = 3!$ Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $a = 0$ coincide con f. Esto ocurre con cualquier polinomio. Más precisamente, como se deduce de las consideraciones que hicimos antes de enunciar el teorema de Taylor, todo polinomio que está escrito en forma de potencias de $x-a$ coincide con el correspondiente polinomio de Taylor en a, ya que los coeficientes del polinomio quedan determinados por sus derivadas en a.

Por ejemplo, si $a = 2$, en el ejemplo que acabamos de tratar, tenemos (recuerde cómo se desarrolla el cubo de un binomio)

$$\begin{aligned} 1 - x^3 &= 1 - (2 + x - 2)^3 \\ &= 1 - [2^3 + 3 \cdot 2^2(x-2) + 3 \cdot 2(x-2)^2 + (x-2)^3] \\ &= -7 - 12(x-2) - 6(x-2)^2 - (x-2)^3, \end{aligned}$$

siendo este último entonces el poliniomio de Taylor de orden 3 de $1 - x^3$ en $a = 2$.

Se puede demostrar el siguiente teorema (nosotros no lo haremos, pero el lector interesado puede intentar hacerlo)

Teorema 2. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función cuya derivada de orden $n \geq 1$ existe y es continua en un entorno de $a \in D$. Si P es un polinomio de grado n de la forma $P(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i(x-a)^i$ tal que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

entonces P es el polinomio de Taylor T_n de orden n de f en a.

El resultado anterior expresa que T_n es el único que tiene la propiedad de aproximar $f(x)$ con error que tiende a cero más rápido que $(x-a)^n$. En otras palabras, si podemos hallar un tal polinomio por un método diferente al introducido en la manera que lo definimos, sabremos que sus coeficientes son precisamente los del polinomio de Taylor correspondiente.

Observación. Como aplicación directa de este teorema se demuestra lo que afirmamos en el ejemplo 1.1(d), puesto que el resto de aproximar el polinomio por si mismo es la función nula.

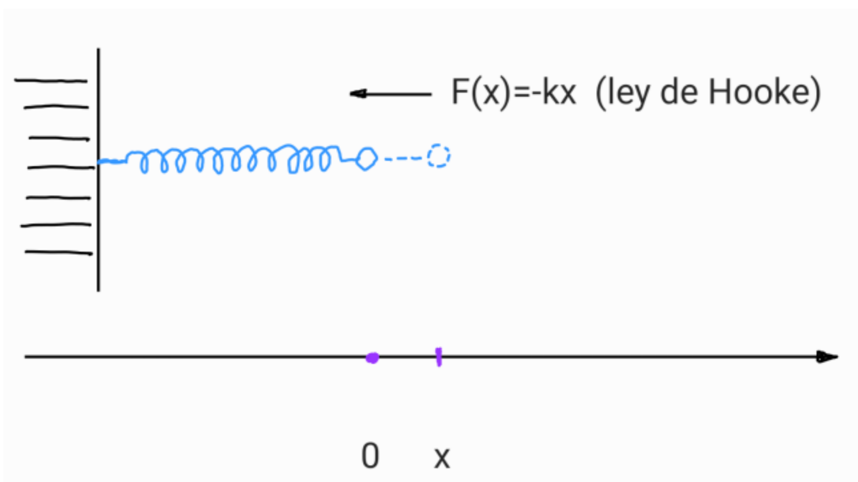
Polinomio de Taylor de función compuesta. Supongamos que $f(x) = g(h(x))$ es una función compuesta tal que conocemos los polinomios de Taylor de h en a y de g en $b = h(a)$. Entonces la composición de los polinomios de Taylor de ambas funciones proporciona un nuevo polinomio que es precisamente el polinomio de Taylor de f en a. La demostración de ésto, es consecuencia del teorema anterior, pero para demostrarlo es necesario antes entender un poco más sobre el resto del Taylor, lo que escapa al objetivo del estas notas. Nosotros lo asumiremos, ya que nos da una forma de calcular el polinomio de Taylor de ciertas funiones que es de utilidad. Veamos un ejemplo concreto:

Ejemplo 2.1. Sea $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$. Nos proponemos hallar el polinomio de Taylor de orden 6 de f en $a = 0$. Si $g(y) = \sqrt{y}$ e $y = h(x) = 1 + x^3$, entonces $f = g \circ h$. Como $1 = h(0)$, precisamos calcular el polinomio de Taylor de g en 1 y de h en 0. Más aún, dado que al componer dos polinomios, el polinomio resultado tiene como grado el producto de grados de los otros dos, basta con calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de g y de orden 3 de h (al revés también funcionaría, pero ya que h es un polinomio de grado 3 en potencias de x, éste coincide con su polinomio de Taylor y por lo tanto es uno de los polinomios que queremos calcular).

De hecho, h coincide con su polinomio de Taylor en 0. Por otro lado, el de g en 1 ya lo calculamos en el ejemplo 1.1(c) y es $1 + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(y-1)^2$. Luego el polinomio de Taylor buscado es

$$T_6(x) = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^6.$$

Ejemplo 2.2. Consideremos la fuerza de reacción ejercida por un resorte ante la compresión o extensión del mismo. Imaginemos el resorte sujeto por uno de sus extremos y ubiquemos el origen de referencia en el otro extremo, como en la figura. El desplazamiento del extremo libre se mide en términos de las abscisas del eje de referencia. Entonces la fuerza que queremos analizar es una función $F(x)$, que por nuestra elección del sistema de referencias verifica $F(0) = 0$. Para pequeños desplazamientos en la dirección del resorte (o sea, variaciones de x en un pequeño entorno de 0), es razonable asumir que la función F tiene derivada continua[1].



Entonces $F(x) = F(0) + F'(0)x + R_1(x)$. De esta forma, si x está suficientemente próximo del origen, podemos despreciar $R_1(x)$ y es razonable aproximar $F(x)$ por su polinomio de Taylor de grado 1, o sea $F(x) \approx F'(x)x$. En otras palabras, éste razonamiento confirma la Ley de Hooke, y deducimos que la constante de Hooke es $k = -F'(0)$. En particular, uno puede imaginar un experimento que permita calcular la constante de Hooke para un resorte específico: bastará con obtener el gráfico aproximado de la fuerza F y determinar la ecuación de su recta tangente en el origen.

[1]Los estiramientos o compresiones del resorte deben ser pequeños en relación al largo del mismo. La compresión de éste está limitada obviamente por su propia estructura. En el caso del estiramiento, la situación es más delicada: se lo puede estirar, en teoría, hasta que el filamento se transforme en un segmento, pero mucho antes de llegar a este punto, el resorte habrá perdido sus cualidades.