Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen práctico (75 puntos). 11/07/22.

1. **(25 puntos).** Se consideran el punto $P = (7, 5, -1)$ y el plano $\Pi :\ 3x + 2y - z = 4$. Se pide:
   a) Hallar la recta r que es perpendicular a Π y pasa por P.
   b) Hallar el plano Π' que es paralelo a Π y contiene a P.
   c) Hallar la distancia entre Π' y Π.
   d) Hallar la recta s que pasa por P y por el origen O.
   e) Hallar el plano Π'' que contiene a las rectas r y s.

2. **(15 puntos).** Sabiendo que vale
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 1$$
   se pide calcular:
$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & 2a_{14} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} & 2a_{24} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & 2a_{34} \\ 2a_{41} & 2a_{42} & 2a_{43} & 2a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3a_{11} + a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3a_{21} + a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 3a_{31} + a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 3a_{41} + a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

3. **(21 puntos).** Se consideran los siguientes subconjuntos de los siguientes espacios
$$\mathcal{B} = \{2 + 3x + 2x^2,\ 2 + x - x^2,\ -2 + x + 2x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x];$$
$$\mathcal{C} = \{(4, 1, 2, 3),\ (4, -2, 0, 2),\ (-1, 2, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^4;$$
$$\mathcal{D} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \subset M_2.$$
   Para cada uno de los conjuntos anteriores se pide:
   a) Investigar si es LD o LI.
   b) En caso de ser posible, escribir un vector del conjunto como combinación lineal de los restantes.
   c) Investigar si es una base del espacio correspondiente.

4. **(14 puntos).** Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + z,\ y,\ x + y + z)$. Se pide:
   a) Hallar una base del núcleo y una base de la imagen.
   b) Investigar si los vectores $(1, 1, 2)$ y $(2, 3, 1)$ están en la imagen de T.

Nota: en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución.

Solución

1. *a*) $r:\ (x,y,z)=(7,5,-1)+t(3,2,-1)$.

   b) $\Pi':\ 3(x-7)+2(y-5)-(z+1)=0$. Luego $\Pi':\ 3x+2y-z=32$.

   c) Sea $Q=r\cap\Pi=(1,1,1)$. Entonces $d(\Pi,\Pi')=d(P,Q)=2\sqrt{14}$.

   d) $s:\ (x,y,z)=t(7,5,-1)$.

   e) Como Π'' que contiene a r y s, entones su vector normal es perpendicular a estas y por lo tanto $n=(3,2,-1)\times(7,5,-1)=(3,-4,1)$. Como además $O\in\Pi''$ (porque $s\subset\Pi''$), deducimos $\Pi'':\ 3x-4y+z=0$.

2. $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & 2a_{14}\\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} & 2a_{24}\\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & 2a_{34}\\ 2a_{41} & 2a_{42} & 2a_{43} & 2a_{44}\end{vmatrix}=16,\quad \begin{vmatrix} 3a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 3a_{21}+a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 3a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ 3a_{41}+a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=3.$$

3. *a*) Los conjuntos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son LI, el $\mathcal{C}$ es LD.

   b) En $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ no es posible porque son LI. En $\mathcal{C}$ es $(4,1,2,3)=\frac{3}{2}(4,-2,0,2)+2(-1,2,1,0)$.

   c) El conjunto $\mathcal{C}$ es LD, así que no es base. El conjunto $\mathcal{D}$ tiene 3 vectores y la dimensión de M_2 es 4, así que $\mathcal{D}$ tampoco es base. El conjunto $\mathcal{B}$ es LI, tiene 3 vectores y la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, así que $\mathcal{B}$ es base.

4. *a*) Es $\operatorname{Ker}(T)=\{(x,y,z):\ x+z=0,\ y=0\}$, luego una base de $\operatorname{Ker}(T)$ es el conjunto $\{(1,0,-1)\}$. Es $\dim\operatorname{Ker}(T)+\dim\operatorname{Im}(T)=3$, luego $\dim\operatorname{Im}(T)=2$. La imagen de la base canónica es un generador de $\operatorname{Im}(T)$, luego $\{(1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,0,1)\}$ es un generador de $\operatorname{Im}(T)$. Juntando lo anterior obtenemos que $\{(1,0,1),\ (0,1,1)\}$ es una base de $\operatorname{Im}(T)$.

   b) Por la parte anterior es

   $$\operatorname{Im}(T)=[(1,0,1),\ (0,1,1)]=\{(a,b,a+b):\ a,b\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,z):\ z=x+y\}.$$

   Luego $(1,1,2)\in\operatorname{Im}(T)$ y $(2,3,1)\notin\operatorname{Im}(T)$.