Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen práctico (3 horas, 75 puntos). 28/07/22.

1. **(20 puntos).**

   a) Sean P un punto y r una recta de ecuación vectorial $X = Q + tu$. Probar que la distancia del punto P a la recta r es $d(P, r) = \frac{\|(P-Q)\times u\|}{\|u\|}$.

   b) Calcular la distancia del punto $(3, 3, 5)$ a la recta de ecuación vectorial $(x, y, z) = (3, 2, 5) + t(2, 2, 1)$.

   c) Calcular la distancia del origen $(0, 0, 0)$ a la recta de ecuación cartesiana $x - 1 = y - 1 = z$.

2. (**20 puntos**) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar la matriz inversa de A.

   b) Hallar una matriz X que verifique $AX + B = C$.

   c) Hallar una matriz Y que verifique $YA = C$.

3. **(35 puntos).**

   a) Probar que $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Hallar las coordenadas de un vector genérico (x, y, z) en la base $\mathcal{B}$.

   c) Hallar un vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (0, 2, -1)$.

   d) Hallar las matrices de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   e) Hallar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 0, 1) = (-1, 1), \quad T(1, 1, 1) = (0, 0), \quad T(1, 0, -1) = (1, 1).$$

   f) Indicar si T es inyectiva o sobreyectiva, justificando la respuesta.

Nota: se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución de los ejercicios.

Solución

1. *a*) La distancia $d(P,r)$ es la norma de la proyección del vector $P-Q$ sobre la dirección ortogonal a u.

   b) Aplicando la fórmula anterior, es

$$d(P,r)=\frac{\|(P-Q)\times u\|}{\|u\|}=\frac{\|(0,1,0)\times(2,2,1)\|}{\|(2,2,1)\|}=\frac{\|(1,0,-2)\|}{\|(2,2,1)\|}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

   c) La recta de ecuación cartesiana $x-1=y-1=z$ tiene ecuación vectorial $(x,y,z)=(1,1,0)+t(1,1,1)$. Luego

$$d(O,r)=\frac{\|(O-Q)\times u\|}{\|u\|}=\frac{\|(-1,-1,0)\times(1,1,1)\|}{\|(1,1,1)\|}=\frac{\|(-1,1,0)\|}{\|(1,1,1)\|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

2. *a*) $A^{-1}=\begin{pmatrix}21 & -7 & -2\\ 2 & -1 & 0\\ -11 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

   b) $AX+B=C \quad\Rightarrow\quad AX=C-B=-I \quad\Rightarrow\quad X=-A^{-1}$. Luego $X=\begin{pmatrix}-21 & 7 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ 11 & -4 & -1\end{pmatrix}$.

   c) $YA=C \quad\Rightarrow\quad Y=CA^{-1} \quad\Rightarrow\quad Y=\begin{pmatrix}12 & -4 & -1\\ 12 & -4 & -1\\ 12 & -4 & -1\end{pmatrix}$.

3. *a*) Es $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$. Luego $\mathcal{B}=\{(1,0,1),\ (1,1,1),\ (1,0,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   b) $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(x,y,z)=\left(\frac{x+z}{2}-y,\ y,\ \frac{x-z}{2}\right)$.

   c) $v=(1,2,3)$.

   d)

$${}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\qquad {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}1/2 & -1 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}.$$

   e)

$$(x,y,z)=\left(\frac{x+z}{2}-y\right)(1,0,1)+y(1,1,1)+\frac{x-z}{2}(1,0,-1)\quad\Rightarrow$$
$$T(x,y,z)=\left(\frac{x+z}{2}-y\right)(-1,1)+y(0,0)+\frac{x-z}{2}(1,1)=(y-z,\ x-y).$$

   Luego $T(x,y,z)=(y-z,\ x-y)$.

   f) Usando la fórmula anterior ss fácil de probar que vale $\operatorname{Ker}(T)=\{(x,x,x):\ x\in\mathbb{R}\}=[(1,1,1)]$. Luego $\operatorname{Ker}(T)\neq\{(0,0,0)\}$ y por lo tanto T no es inyectiva. Además es $\dim\operatorname{Im}(T)=3-1=2=\dim\mathbb{R}^2$, luego $\operatorname{Im}T=\mathbb{R}^2$ y por lo tanto T es sobreyectiva.