

Examen teórico (1 hora, 25 puntos). 28/07/22.

1. (6 puntos). Trabajamos en el plano \mathbb{R}^2 .
 - a) Definir el producto escalar de dos vectores.
 - b) Enunciar y demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

2. (6 puntos). Trabajamos con matrices cuadradas.
 - a) Definir matriz invertible
 - b) Probar que si una matriz es invertible, entonces su inversa es única.

3. (6 puntos). Sea V un espacio vectorial.
 - a) Definir *base* de V .
 - b) Sean \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 subconjuntos de V . Supongamos que \mathcal{A}_1 es LI y que \mathcal{A}_2 es un generador. ¿Hay alguna relación entre las cantidades de elementos de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 ?
 - c) Probar que si \mathcal{B} y \mathcal{C} son dos bases de V , entonces \mathcal{B} y \mathcal{C} siempre tienen la misma cantidad de elementos.

4. (7 puntos). Sean V y W dos espacios vectoriales.
 - a) Definir *transformación lineal* $T : V \rightarrow W$.
 - b) Probar que si $T : V \rightarrow W$ es inyectiva y $\{v_1, v_2\} \subset V$ es LI, entonces $\{T(v_1), T(v_2)\} \subset W$ es LI.
 - c) Dar ejemplos (justificando las afirmaciones) de cada uno de los casos siguientes:
 - 1) una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que sea inyectiva.
 - 2) una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que no sea inyectiva.

Solución

1.