Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen práctico (3 horas, 75 puntos). 05/12/22.

1. **(20 puntos).** Se consideran las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -2z \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} y = 1 - 2x \\ z = x \end{cases}.$$

   a) Probar que r_1 y r_2 son paralelas.
   b) Hallar la ecuación cartesiana (del tipo $ax + by + cz = d$) del plano Π_1 que contiene a r_1 y r_2.
   c) Hallar la ecuación cartesiana del plano Π_2 que contiene a r_1 y es perpendicular a Π_1.
   d) Hallar la intersección de las rectas r_3 y r_2, siendo r_3 la recta que pasa por $(1, 0, 0)$ y es perpendicular a Π_2.

2. (**20 puntos**) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Se pide:

   a) Calcular sus determinantes.
   b) Sea $O = (0, 0, 0, 0)$ la matriz fila nula[1]. En cada uno de los casos siguientes, encontrar, en caso de ser posible, una matriz fila $X = (x, y, z, t)$ <u>no nula</u> tal que:
      1) $XA = O$.
      2) $XB = O$.

3. **(35 puntos).**

   a) Se considera $W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \; a + b + c = d\}$. Notar que W es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$. Hallar una base de W y dar la dimensión de W.
   b) Sea $T : M_2 \to \mathbb{R}_3[x]$ la transformación lineal que verifica

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 + x^3, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - x, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = x - x^2, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = x^2 + x^3.$$

      1) Hallar la fórmula que define a T, es decir $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \cdots$.
      2) Hallar una base de $\operatorname{Ker}(T)$ y una base de $\operatorname{Im}(T)$.
      3) Probar $\operatorname{Im}(T) = W$, siendo W el subespacio de la parte $3a$.

Nota: se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución de los ejercicios.

[1] Escribimos la matriz fila como un vector para que quede más clara.

Solución

1. *a*) Las ecuaciones vectoriales de r_1 y r_2 son

$$r_1 :\ (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, -2, 1), \quad r_2 :\ (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(1, -2, 1)$$

Luego las dos son paralelas al vector $(1, -2, 1)$ y por lo tanto son paralelas entre sí.

b) Consideremos $P_1 = (1, 0, 0) \in r_1$, $P_2 = (2, -1, 1) \in r_1$ y $P_3 = (0, 1, 0) \in r_2$.
Entonces $\Pi_1 :\ x + y + z = 1$ es el plano que pasa por esos puntos.

c) El vector $n = (1, 1, 1)$ es perpendicular a Π_1 y $v = (1, -2, 1)$ es paralelo a r_1. Como $P_1 = (1, 0, 0) \in r_1$, entonces Π_2 es el plano por P_1 que es paralelo a v y n. Notar $v \times n = 3(1, 0, -1)$, luego $\Pi_2 :\ x - z = 1$.

d) La ecuación vectorial de r_3 es $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 0, -1)$. La intersección da el punto $P_4 = (1/2, 0, 1/2)$.

2. *a*) $\det A = 1$ y $\det B = 0$.

b) Como es $\det A \neq 0$, entonces A es invertible. Luego $XA = O$ implica $X = OA^{-1} = O$. Luego en este caso no es posible hallar $X \neq O$ tal que $XA = O$.

c) La ecuación $XB = O$ equivale al siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 3t &= 0 \\ -x + z + 3t &= 0 \\ 4x + y + 2z + 4t &= 0 \\ 3x + 2y + z &= 0 \end{cases}.$$

Este sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son de la forma $x = z$, $y = -2z$, $t = 0$, con z libre. Tomando por ejemplo $z = 1$ obtenemos que $X = (1, -2, 1, 0)$ verifica $XB = O$.

3. *a*) Si $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W$, entonces

$$p(x) = a + bx + cx^2 + (a + b + c)x^3 = a\left(1 + x^3\right) + b\left(x + x^3\right) + c\left(x^2 + x^3\right)$$

Luego $\left\{1 + x^3,\ x + x^3,\ x^2 + x^3\right\}$ es un generador de W y es fácil de probar que es LI, luego es base de W. Esto implica $\dim W = 3$.

b) 1) $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = a + b + (c - b)x + (d - c)x^2 + (a + d)x^3$.

2) Una base de $\mathrm{Ker}\,(T)$ es $\left\{\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$. Luego $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim M_2 - \dim \mathrm{Ker}\,(T) = 4 - 1 = 3$. El conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base de M_2, luego $\left\{1 + x^3,\ 1 - x,\ x - x^2,\ x^2 + x^3\right\}$ es un generador de $\mathrm{Im}(T)$. Notar

$$1 + x^3 = (1 - x) + \left(x - x^2\right) + \left(x^2 + x^3\right)$$

Luego $\mathcal{B} = \left\{1 - x,\ x - x^2,\ x^2 + x^3\right\}$ también es un generador de $\mathrm{Im}(T)$ y como es $\dim \mathrm{Im}(T) = 3$, concluimos que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$.

3) Es clara la inclusión $\mathcal{B} \subset W$ y como $\mathcal{B}$ es LI y $\dim W = 3$, concluimos que $\mathcal{B}$ es una base de W. Luego $\mathcal{B}$ es una base de W y de $\mathrm{Im}(T)$, por lo cual $W = \mathrm{Im}(T) = [\mathcal{B}]$.