Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal y Geometría I
Primer semestre de 2022

Examen teórico (1 hora, 25 puntos). 05/12/22.

1. **(6 puntos).** Trabajamos en el plano $\mathbb{R}^2$.

   a) Partiendo de la fórmula del producto escalar dada por $u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$, probar que si $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$, entonces
   $$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2,$$

   b) Probar $(au) \cdot v = a(u \cdot v)$, para todo $a \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{R}^2$.

2. **(6 puntos).** Trabajamos con matrices cuadradas.

   a) Definir el determinante de una matriz 4×4.

   b) Recordar que si intercambiamos dos columnas, entonces el determinante cambia de signo y que si en una matriz multiplicamos una columna por una constante, entonces su determinante también se multiplica por dicha constante. Probar que en los casos siguientes el determinante de la matriz A es nulo.

      1) la matriz A tiene dos columnas iguales;
      2) la matriz A tiene una columna que es múltiplo de otra columna.

3. **(6 puntos).** Sea V un espacio vectorial.

   a) Dar la definición de *subespacio* de V.

   b) Probar que si $u, v \in V$, entonces $[u, v] := \{au + bv : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V.

4. **(7 puntos).** Sea V un espacio de dimensión dos y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ y $\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$ dos bases ordenadas de V.

   a) Definir la matriz de cambio de base ${}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$.

   b) Probar $\mathrm{coord}_{\mathcal{C}}(v) = {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} \cdot \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v)$, para todo $v \in V$.

   c) En los casos siguientes indicar si la matriz puede ser una matriz de cambio de base, justificando la respuesta.
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$