Álgebra Lineal y Geometría I
Primer semestre de 2022

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen práctico (3 horas, 75 puntos). 01/02/23.

1. **(25 puntos).** Se considera el triángulo $\mathcal{T}$ de vértices $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 2, 2)$ y $R = (2, 1, 0)$
   a) Probar que el triángulo $\mathcal{T}$ es rectángulo.
   b) Hallar las longitudes de los lados de $\mathcal{T}$.
   c) Hallar la ecuación del plano Π que pasa por P y es ortogonal al lado $\overline{QR}$.
   d) Hallar H, el pie de la altura[1] del triángulo $\mathcal{T}$ correspondiente al vértice $P = (1, 1, 1)$.
   e) Sea $A = (6, 3, 0)$. Probar que los puntos P, H y A están alineados.

2. (**25 puntos**) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Se pide:
   a) Calcular el determinante de A.
   b) Hallar la inversa de A.
   c) Encontrar una matriz $X \in M_{4\times 4}$ tal que $AX = M$.

3. (**25 puntos**) Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(v) = Bv$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Se pide:
   a) Hallar explícitamente $T(x, y, z, t) = \cdots$
   b) Hallar una base y la dimensión de $\mathrm{Ker}\,(T)$.
   c) Hallar una base y la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$.

Nota: se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución de los ejercicios.

[1] Recordar que la *altura* h en P es la perpendicular por P al lado $\overline{QR}$, y su *pie* es la intersección de h con $\overline{QR}$.

Solución

1. Es $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,1,1)$, $\overrightarrow{PR} = (1,0,-1)$ y $\overrightarrow{RQ} = (0,1,2)$.

   a) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 1 + 0 - 1 = 0$, luego los lados $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ son perpendiculares.

   b) $\|\overline{PQ}\| = \sqrt{2}$, $\|\overline{PR}\| = \sqrt{3}$ y $\|\overline{RQ}\| = \sqrt{5}$.

   c) El plano Π pasa por $P = (1,1,1)$ y es ortogonal a $\overrightarrow{RQ} = (0,1,2)$, luego $\Pi: \; y + 2z = 3$.

   d) El punto H se obtiene usando la proyección ortogonal:

$$H = Q + \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}}{\left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2} \overrightarrow{QR} = (2,2,2) + \frac{3}{5}(0,-1,-2) = \left(2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

   Otra forma de resolverlo es notar que H es la intersección del plano Π con la recta RQ. Luego

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y + 2z & = & 3 \\ (x,y,z) & = & (2, 1+t, -2t) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad 1 + 2t - 2(-2t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad H = \left(2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

   e) $\overrightarrow{PA} = A - P = (5,2,-1)$ y $\overrightarrow{PH} = H - P = \left(1, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$. Luego $\overrightarrow{PA} = 5\overrightarrow{PH}$, por lo tanto $\overrightarrow{PH}$ y $\overrightarrow{PA}$ son colineales lo cual implica que P, H y A están alineados.
   Otra forma de resolverlo es probar que A está en la recta $\overline{PH}$:

$$\overline{PH}: \; (x,y,z) = (1,1,1) + t\left(1, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right); \quad (6,3,0) \stackrel{?}{=} \left(1+t, \, 1 + \frac{2}{5}t, \, 1 - \frac{1}{5}t\right) \; \Rightarrow \; t = 5.$$

2. *a*) Es $\det(A) = 1$.

   b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   c) $X = A^{-1}M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. *a*) $T(x,y,z,t) = (x + y + 2z + 3t, \, 2y + z + t, \, x + 3y + t, \, x + 4y + t)$.

   b) Una base de $\operatorname{Ker}(T)$ es $\{(1,0,1,-1)\}$, luego $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$.

   c) Como $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$, entonces $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$. Las columnas de B son un generador de $\operatorname{Im}(T)$ y la cuarta columna de B es suma de la primera y la segunda, luego las tres primeras columnas de B son un generador de $\operatorname{Im}(T)$ y como $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$, entonces forman una base. Luego

$$\{(1,0,1,1), \, (1,2,3,4), \, (2,1,0,0)\}$$

   es una base de $\operatorname{Im}(T)$.