Álgebra Lineal y Geometría I
Primer semestre de 2022

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen teórico (1 hora, 25 puntos). 01/02/23.

1. **(6 puntos).** Trabajamos en el plano $\mathbb{R}^2$.
   a) Escribir las dos fórmulas del producto escalar: la de física (que involucra el ángulo) y la fórmula con coordenadas.
   b) Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|u\| = 3$ y $\|v\| = 4$. En cada uno de los casos siguientes, indicar si la afirmación es posible, justificando la respuesta.
      1) Vale $u \cdot v = 15$.
      2) Vale $u \cdot v = -12$.

2. **(6 puntos).** Trabajamos con matrices cuadradas.
   a) Definir el determinante de una matriz 4×4.
   b) Probar que si una matriz A es invertible, entonces $\det(A) \neq 0$ y $\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}$.
   Nota: para probarlo se pueden usar las propiedes del determinante del producto.

3. **(6 puntos).** Sea V un espacio vectorial.
   a) Definir conjunto linealmente dependiente (LD) y conjunto linealmente independiente (LI).
   b) Se consideran los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

$$A_1 = \{(1,1,1),\ (2,1,3),\ (2,2,2)\},$$
$$A_2 = \{(1,-2,5),\ (4,5,7),\ (3,1,-2),\ (2,1,3)\}.$$

   Indicar si cada uno de ellos es LD o LI, justificando la respuesta.

4. **(7 puntos).** Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
   a) Definir qué quiere decir que T sea inyectiva.
   b) Definir $\operatorname{Ker}(T)$, el núcleo de T.
   c) Probar que T es inyectiva si y solo si $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$