Examen práctico (3 horas, 75 puntos). 17/02/23.

1. (**25 puntos**) En cada caso, hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones especificadas:

   a) Pasa por el punto $(1,2,3)$ y es perpendicular al plano $3x+2y+z=5$.

   b) Pasa por el punto $(2,2,1)$ y es paralela a la recta determinada por $\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 4 \\ z-y &=& 3 \end{array}\right.$.

   c) Pasa por el punto $(2,0,1)$ e intersecta perpendicularmente a la recta $(x,y,z)=(2,0,4)+t(1,-1,1)$.

2. (**25 puntos**)

   a) Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & 1 & 1 \\ \lambda & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda^2-3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Hallar los valores de λ para los cuales A no es invertible.

   b) Se considera el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\lambda-1)x+2y+z+t &=& 1 \\ \lambda x+5y+2z+2t &=& 1 \\ x+y+\left(\lambda^2-3\right)z+t &=& \lambda \\ 3x+3y+3z+3t &=& 6 \end{array}\right..$$

   Discutir según λ si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

3. (**25 puntos**) Se considera el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que dos.

   a) Probar que $B=\left\{1,\,1+x,\,1+x+x^2\right\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

   b) Sea $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal tal que

$$T(1)=2+x,\quad T(1+x)=1+x+x^2,\quad T\left(1+x+x^2\right)=2+2x+2x^2.$$

   Hallar $T\left(a+bx+cx^2\right)=\cdots$, con a,b,c arbitrarios.

   c) Hallar una base del núcleo de T.

Nota: se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución de los ejercicios.

Solución

1. a) $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, 2, 1)$.
   b) $(x, y, z) = (2, 2, 1) + t(1, 1, -1)$.
   c) $(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(-1, 1, 2)$.

2. a) El determinante de A es $-6(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)$; luego A no es invertible si y solo si $\lambda = \pm 2$.
   b) Para $\lambda \neq \pm 2$ el sistema es compatible determinado, para $\lambda = -2$ el sistema es incompatible y para $\lambda = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

3. a) Es fácil de probar que B es LI lo cual implica que es base, dado que $\#B = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$.
   b) $T\left(a + bx + cx^2\right) = 2a - b + c + (a + c)x + (b + c)x^2$.
   c) Una base del núcleo de T es $\left\{1 + x - x^2\right\}$.