Álgebra Lineal y Geometría I
Primer semestre de 2022

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Prueba 1, parte práctica (45 puntos). 30/04/22.

1. **(15 puntos).** Clasificar y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$a)\ \begin{cases} x+4y+2z &= 4 \\ 2x+3y+5z &= 2 \\ 3x-2y+2z &= 2 \end{cases} ; \qquad b)\ \begin{cases} 2x-3y+z &= 1 \\ x+y+z &= 2 \\ x+6y+2z &= 5 \end{cases} .$$

2. **(15 puntos).** Sea $u = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$ y $v = 3\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, con $a \in \mathbb{R}$. En cada uno de los casos siguientes, hallar a para que se verifique la condición dada.

   a) Los vectores u y v son ortogonales.

   b) La norma de v es $\|v\| = \sqrt{38}$.

   c) Si θ es el ángulo entre u y v, entonces $\cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{14}\sqrt{53}}$.

3. **(15 puntos).** Se considera el triángulo de vértices $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 3, 3)$ y $R = (0, 4, 3)$.

   a) Hallar la longitud del lado PQ.

   b) Hallar la medida del ángulo en el vértice Q.

   c) Hallar la altura del vértice Q sobre el lado PR.

Solución

1. *a*) El sistema *a*) es compatible determinado, su solución es $x = 2$, $y = 1$ y $z = -1$.
   El sistema *b*) es compatible indeterminado con un grado de libertad; solución: $x = -1+4y$, $z = 3-5y$, y libre.

2. *a*) $u \cdot v = 6 + a - 6 \stackrel{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0.$

   b) $\|v\| = \sqrt{38} \quad \Rightarrow \quad \|v\|^2 = 38 \quad \Rightarrow \quad 9 + a^2 + 4 = 38 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 5.$

   c) Usando $\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$ obtenemos

$$\frac{-1}{\sqrt{14}\,\sqrt{53}} = \frac{a}{\sqrt{14}\sqrt{a^2+13}} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{53}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+13}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{53} = \frac{a^2}{a^2+13} \quad \Rightarrow \quad a^2 + 13 = 53\,a^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \pm\frac{1}{2}.$$

   Volviendo a la primer ecuación, deducimos que es $a = -\frac{1}{2}$.

3. *a*) $d(P, Q) = |P - Q| = 3.$

   b)

$$P - Q = (-1, -2, -2), \quad R - Q = (2, -1, 0) \quad \Rightarrow \quad (P - Q) \cdot (R - Q) = (-1, -2, -2) \cdot (2, -1, 0) = 0.$$

   Luego $P - Q$ y $R - Q$ son perpendiculares y por lo tanto el ángulo es $\pi/2$.

   c) Si llamamos $v = Q - P = (1, 2, 2)$ y $u = R - P = (-1, 3, 2)$, entonces

$$h = \frac{\|v \times u\|}{\|u\|} = \frac{\|(1,2,2) \times (-1,3,2)\|}{\|(-1,3,2)\|} = \frac{\|(-2,-4,5)\|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{14}}.$$