Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal y Geometría I
Primer semestre de 2022

Prueba 3, parte práctica (60 puntos). 11/07/22.

1. **(30 puntos).** Se consideran los siguientes subconjuntos de los siguientes espacios

$$\mathcal{B} = \{2 + 3x + 2x^2,\ 2 + x - x^2,\ -2 + x + 2x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x];$$
$$\mathcal{C} = \{(4, 1, 2, 3),\ (4, -2, 0, 2),\ (-1, 2, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^4;$$
$$\mathcal{D} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\} \subset M_2.$$

   Para cada uno de los conjuntos anteriores se pide:

   a) Investigar si es LD o LI.

   b) En caso de ser posible, escribir un vector del conjunto como combinación lineal de los restantes.

   c) Investigar si es una base del espacio correspondiente.

2. **(15 puntos).** En cada uno de los casos siguientes, investigar si existe alguna transformación lineal $T : V \to V$ que verifique las condiciones dadas. En caso afirmativo hallarla y en caso negativo justificar la respuesta.

   a) $V = \mathbb{R}^3$; $T(2, -3, 1) = (1, 0, 1)$, $T(-3, 4, -2) = (0, 1, 0)$, $T(-1, 1, -1) = (1, 2, 3)$.
   Sugerencia: ¿existe alguna relación entre $(2, -3, 1)$, $(-3, 4, -2)$ y $(-1, 1, -1)$?

   b) $V = M_2$; $T\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $T\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $T\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = T\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

3. **(15 puntos).** Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + z,\ y,\ x + y + z)$. Se pide:

   a) Hallar una base del núcleo y una base de la imagen.

   b) Investigar si los vectores $(1, 1, 2)$ y $(2, 3, 1)$ están en la imagen de T.

Nota: en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución.

Solución

1. *a)* Los conjuntos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son LI, el $\mathcal{C}$ es LD.

   b) En $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ no es posible porque son LI. En $\mathcal{C}$ es $(4,1,2,3) = \frac{3}{2}(4,-2,0,2) + 2(-1,2,1,0)$.

   c) El conjunto $\mathcal{C}$ es LD, así que no es base. El conjunto $\mathcal{D}$ tiene 3 vectores y la dimensión de M_2 es 4, así que $\mathcal{D}$ tampoco es base. El conjunto $\mathcal{B}$ es LI, tiene 3 vectores y la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, así que $\mathcal{B}$ es base.

2. *a)* Vale $(-1,1,-1) = (2,-3,1) + (-3,4,-2)$, pero

$$T(2,-3,1) + T(-3,4,-2) = (1,0,1) + (0,1,0) = (1,1,1) \neq (1,2,3) = T(-1,1,-1)$$

   luego no existe una tal T.

   b) El conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ es una base de M_2, luego sabemos que existe una tal T. Para hallarla es $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right) = (x-z)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + (y-z)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + (t-z)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + z\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ Luego

$$T\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right) = (x-z)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) + (y-z)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + (t-z)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + z\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x-y & 0 \\ 0 & y-x \end{smallmatrix}\right).$$

   Entonces $T : M_2 \to M_2$ está definida por $T\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x-y & 0 \\ 0 & y-x \end{smallmatrix}\right).$

3. *a)* Es $\operatorname{Ker}(T) = \{(x,y,z) : \ x+z=0, \ y=0\}$, luego una base de $\operatorname{Ker}(T)$ es el conjunto $\{(1,0,-1)\}$. Es $\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = 3$, luego $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$. La imagen de la base canónica es un generador de $\operatorname{Im}(T)$, luego $\{(1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,0,1)\}$ es un generador de $\operatorname{Im}(T)$. Juntando lo anterior obtenemos que $\{(1,0,1),\ (0,1,1)\}$ es una base de $\operatorname{Im}(T)$.

   b) Por la parte anterior es

$$\operatorname{Im}(T) = [(1,0,1),\ (0,1,1)] = \{(a,b,a+b) : \ a,b \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) : \ z = x+y\}.$$

   Luego $(1,1,2) \in \operatorname{Im}(T)$ y $(2,3,1) \notin \operatorname{Im}(T)$.