Álgebra Lineal y Geometría I
Primer semestre de 2022

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Prueba 3 práctica (2 horas, 60 puntos). 28/07/22.

1. **(30 puntos).**
   a) Probar que $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (1,1,1), (1,0,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Hallar las coordenadas de un vector genérico (x, y, z) en la base $\mathcal{B}$.
   c) Hallar un vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (0, 2, -1)$.
   d) Hallar las matrices de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

2. **(30 puntos).** Se considera el vector $w = (1, 1, 1)$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = v \times w$ (producto vectorial), para todo $v \in \mathbb{R}^3$.
   a) Hallar explícitamente $T(x, y, z) = \cdots$.
   b) Determinar el núcleo $\operatorname{Ker}(T)$ y dar una base de $\operatorname{Ker}(T)$.
   c) Determinar la imagen $\operatorname{Im}(T)$ y dar una base de $\operatorname{Im}(T)$.
   d) Para cada uno de los vectores
   $$v_1 = (2, 2, 2), \quad v_2 = (1, 1, 2), \quad v_3 = (1, 1, -2),$$
   se pide determinar si está en el núcleo de T y si está en la imagen de T, justificando la respuesta.

Nota: se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución de los ejercicios.

Solución

1. *a*) Es $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Luego $\mathcal{B} = \{(1,0,1),\ (1,1,1),\ (1,0,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   b) $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(x,y,z) = \left(\frac{x+z}{2} - y,\ y,\ \frac{x-z}{2}\right)$.

   c) $v = (1,2,3)$.

   d)

$$
{}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.
$$

2. *a*) $T(x,y,z) = (x,y,z) \times (1,1,1) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Luego $T(x,y,z) = (y-z,\ z-x,\ x-y)$.

   b) $v \in \operatorname{Ker}(T) \Leftrightarrow v \times w = o \Leftrightarrow v$ es colineal con $w \Leftrightarrow v \in [w]$. Luego $\operatorname{Ker}(T) = [w] = \{(x,x,x) :\ x \in \mathbb{R}\}$. Una base de $\operatorname{Ker}(T)$ es $\{(1,1,1)\}$.

   c) Notar que $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$, luego $\dim \operatorname{Im}(T) = 3 - 1 = 2$. Si $v \in \mathbb{R}^3$, entonces $T(v) = v \times w$ es ortogonal a w. Esto implica $\operatorname{Im}(T) \subset \{\text{plano por el origen ortogonal a w}\} = \{(x,y,z) :\ x+y+z=0\}$. Como tienen la misma dimensión, concluimos $\operatorname{Im}(T) = \{(x,y,z) :\ x+y+z=0\}$.
   Una base de la imagen de T es $\{(1,-1,0),\ (0,1,-1)\}$.

   d) Usando $\operatorname{Ker}(T) = \{(x,x,x) :\ x \in \mathbb{R}\}$ e $\operatorname{Im}(T) = \{(x,y,z) :\ x+y+z=0\}$, se ve que $v_1 \in \operatorname{Ker}(T)$ y $v_1 \notin \operatorname{Im}(T)$; $v_2 \notin \operatorname{Ker}(T)$ y $v_2 \notin \operatorname{Im}(T)$; $v_3 \notin \operatorname{Ker}(T)$ y $v_3 \in \operatorname{Im}(T)$.