Examen corto, parte teórica (20 puntos). 11/07/22.

1. **(6 puntos).** Sea V un espacio vectorial.
   a) Definir conjunto linealmente dependiente (LD) y conjunto linealmente independiente (LI).
   b) Dar un ejemplo de un conjunto LD y de uno LI, justificando las afirmaciones.
   c) Sean $u, v, w \in V$. Probar que si $\{u, v\}$ es LI y w no es combinación lineal de $\{u, v\}$, entonces $\{u, v, w\}$ es LI.

2. **(6 puntos).** Sea V un espacio vectorial.
   a) Definir qué quiere decir que un conjunto sea una *base* de V.
   b) Definir la *dimensión* de V.
   c) Supongamos que es $V = \mathbb{R}^3$ y que tenemos dos subconjuntos[1] $\mathcal{A} = \{u_1, u_2\}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Se consideran las siguientes afirmaciones.
      1) El conjunto $\mathcal{A}$ puede ser una base de $\mathbb{R}^3$.
      2) El conjunto $\mathcal{A}$ puede ser un generador de $\mathbb{R}^3$.
      3) El conjunto $\mathcal{A}$ puede ser LI.
      4) El conjunto $\mathcal{B}$ puede ser una base de $\mathbb{R}^3$.
      5) El conjunto $\mathcal{B}$ puede ser un generador de $\mathbb{R}^3$.
      6) El conjunto $\mathcal{B}$ puede ser LI.

      Indicar cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, justificando la repuesta.

3. **(8 puntos).** Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.
   a) Probar que vale $T(o) = o$, es decir, T lleva el vector nulo de V en el vector nulo de W.
   b) Definir el *núcleo* de T.
   c) Probar que T es inyectiva si y solo si $\operatorname{Ker}(T) = \{o\}$.

Nota. En las demostraciones se deben justificar todos los pasos; si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice ..., entonces ..."

[1] Asumimos que en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no hay elementos repetidos.