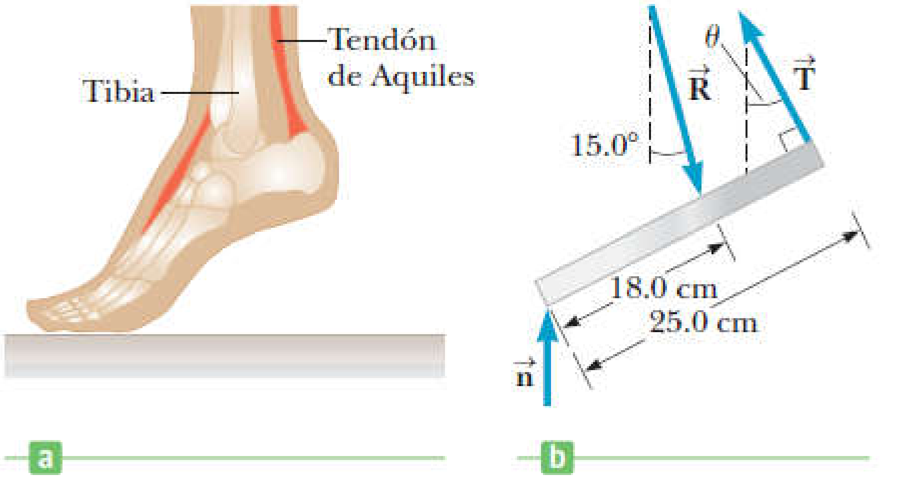
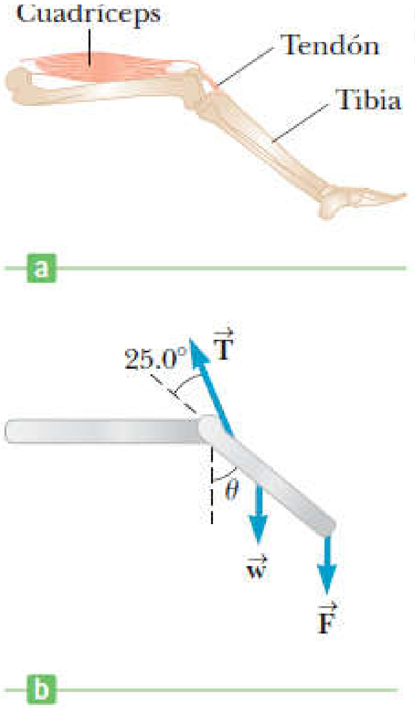
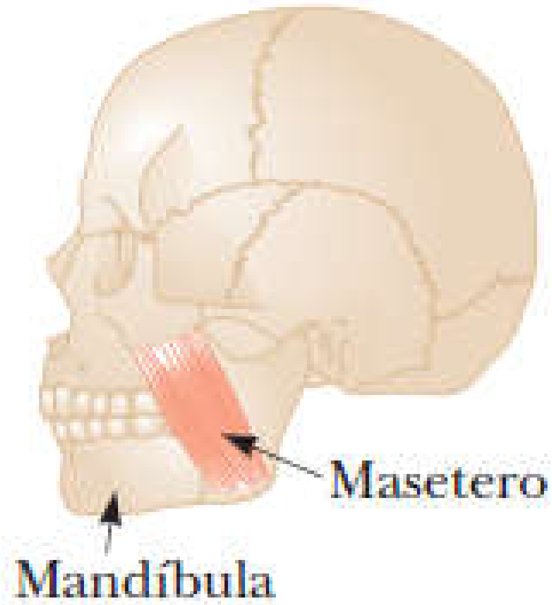
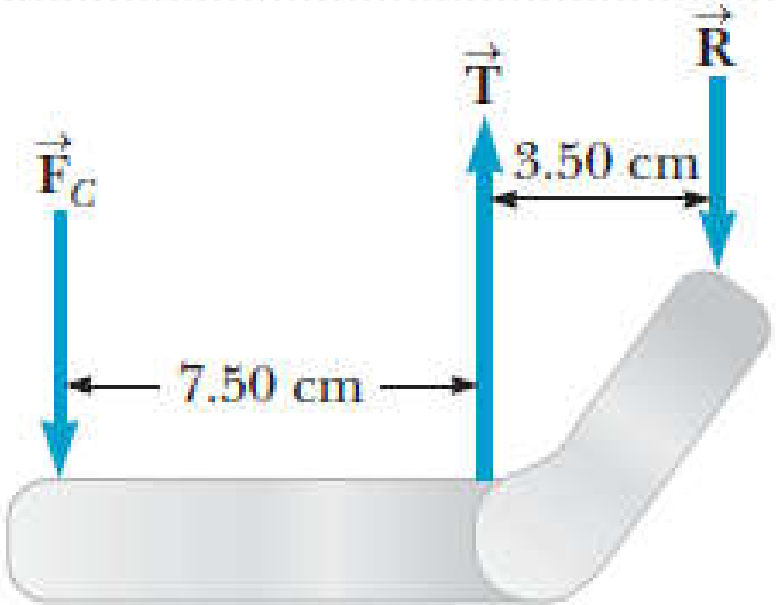
12- LEYES DEL MOVIMIENTO Y EQUILIBRIO ESTÁTICO

Parte IV Equilibrio estático:
Palancas, ventaja mecánica. as mandíbulas de los animales. Centro de gravedad de los seres humanos. Ejemplos de cuerpos rígidos en equilibrio estático.



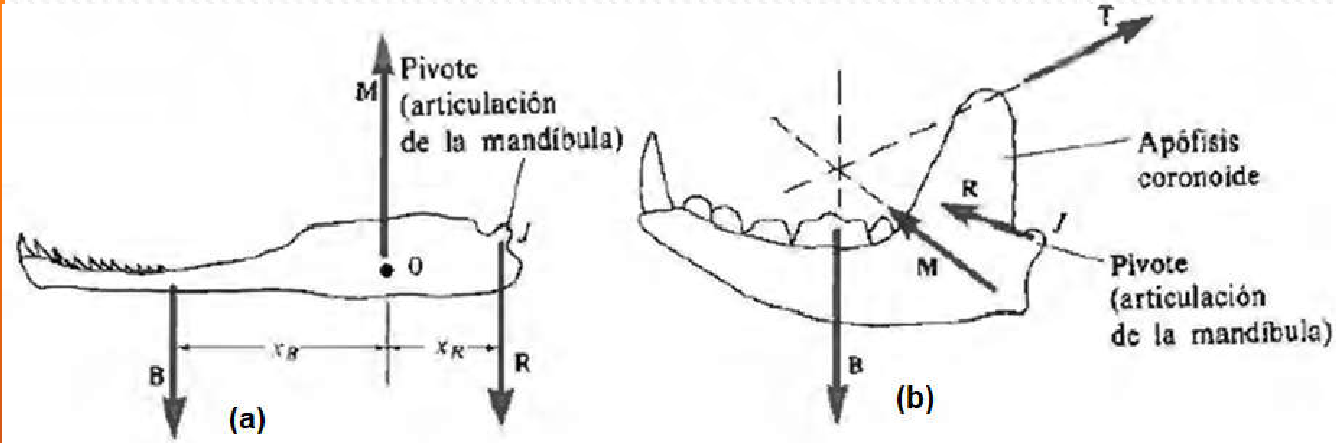






Las mandíbulas de los animales

Un animal debe poder morder con fuerza: esto depende del módulo, dirección y punto de aplicación de las fuerzas ejercidas por los músculos que cierran la mandíbula.
Además, los huesos de la articulación *de la mandíbula superior con la inferior* deben ser lo suficientemente resistentes a fin de evitar fracturas y dislocaciones.
A partir de fósiles, sabemos que los mamíferos han evolucionado a partir de reptiles de modo que los músculos implantados en la mandíbula inferior iban *creciendo progresivamente, mientras que los huesos de* la articulación iban *disminuyendo de tamaño.*
*La apa*rente paradoja puede explicarse en términos de los cambios de dirección y de punto de aplicación de las fuerzas musculares.

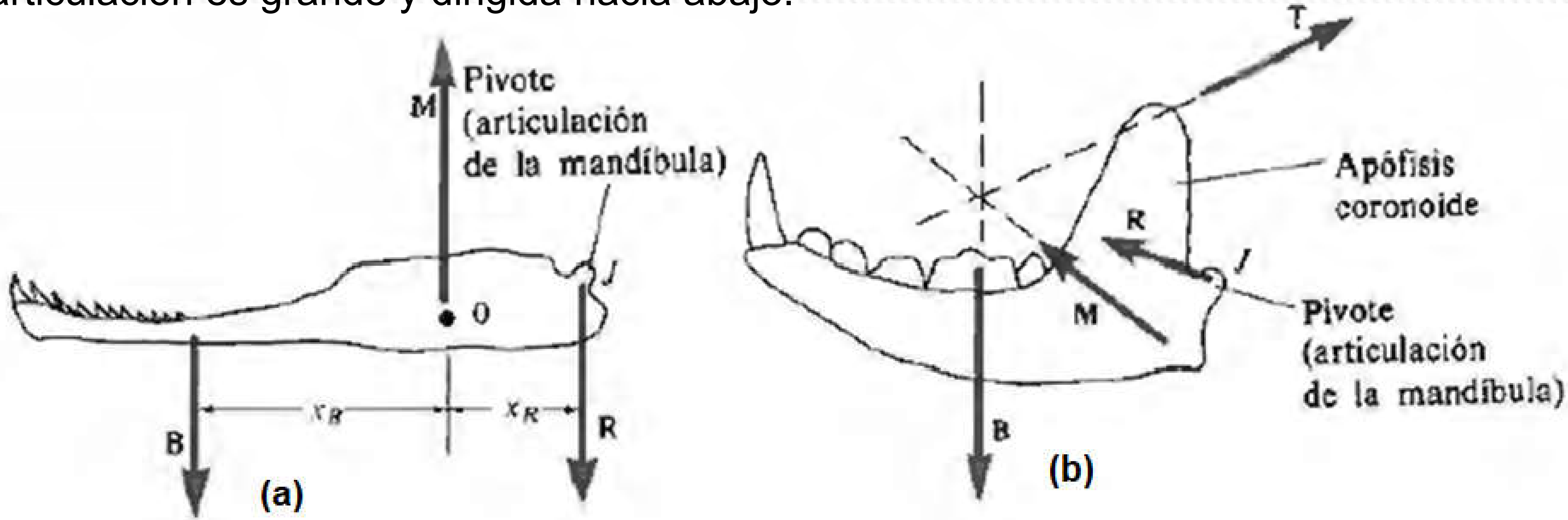


Veremos las **diferencias básicas entre la mandíbula inferior de un reptil primitivo y el típico aspecto de un mamífero actual**.

El primero es una simple barra con unos músculos que empujan hacia arriba, implantados en un punto cercano a la articulación.
La mandíbula de los mamíferos tiene una gran protuberancia llamada ***apófisis coronoides,*** *en la cual se implanta* el **músculo *temporal*** *que* empuja hacia *atrás y hacia arriba* ***(fuerza T).***
El ***masetero*** *y el* ***pterygoides*** *empujan hacia adelante* y hacia arriba (fuerza **M).**

Las mandíbulas de los animales

Un reptil primitivo que muerde con una fuerza dirigida hacia arriba -**B** la comida situada entre sus dientes posteriores experimenta una reacción igual pero opuesta **B sobre su mandíbula.** Como la fuerza muscular **M** se aplica cerca de la articulación, se puede alcanzar el equilibrio estático sólo si la **fuerza R** ejercida sobre la articulación es grande y dirigida hacia abajo.

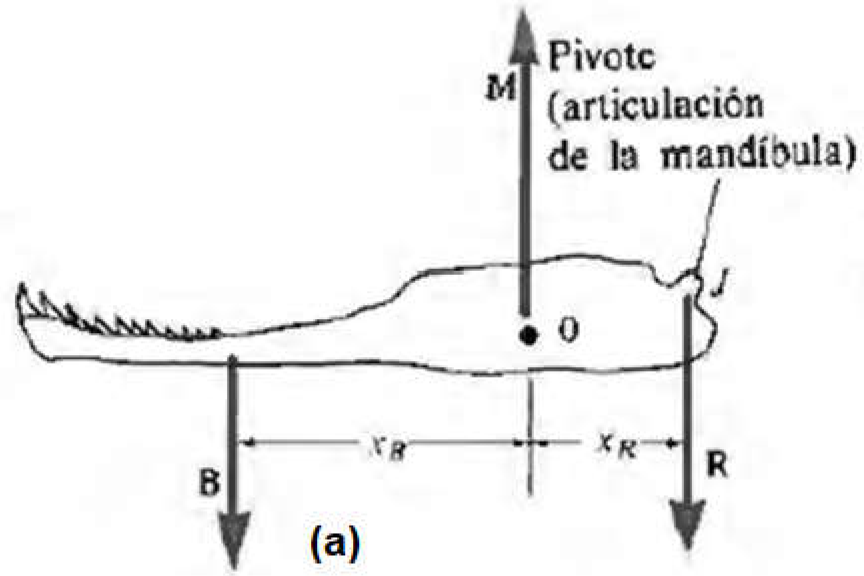


(a) **Mandíbula inferior de un reptil primitivo.** **M** es la fuerza debida al músculo. **B** es la fuerza de reacción que presenta el objeto que está siendo mordido y **R** es la fuerza debida a la articulación de la mandíbula en *J*.

(b) Mandíbula de mamífero*. Las fuerzas musculares son **T** y **M.*** La fuerza **R** debida a la articulación de la mandíbula puede ser nula si las líneas de acción de las tres fuerzas **T**, **B** y **M** se cortan de la manera que se muestra aquí.

Las mandíbulas de los animales

Para el reptil: calculando los momentos con respecto al punto O, el momento neto es cero si



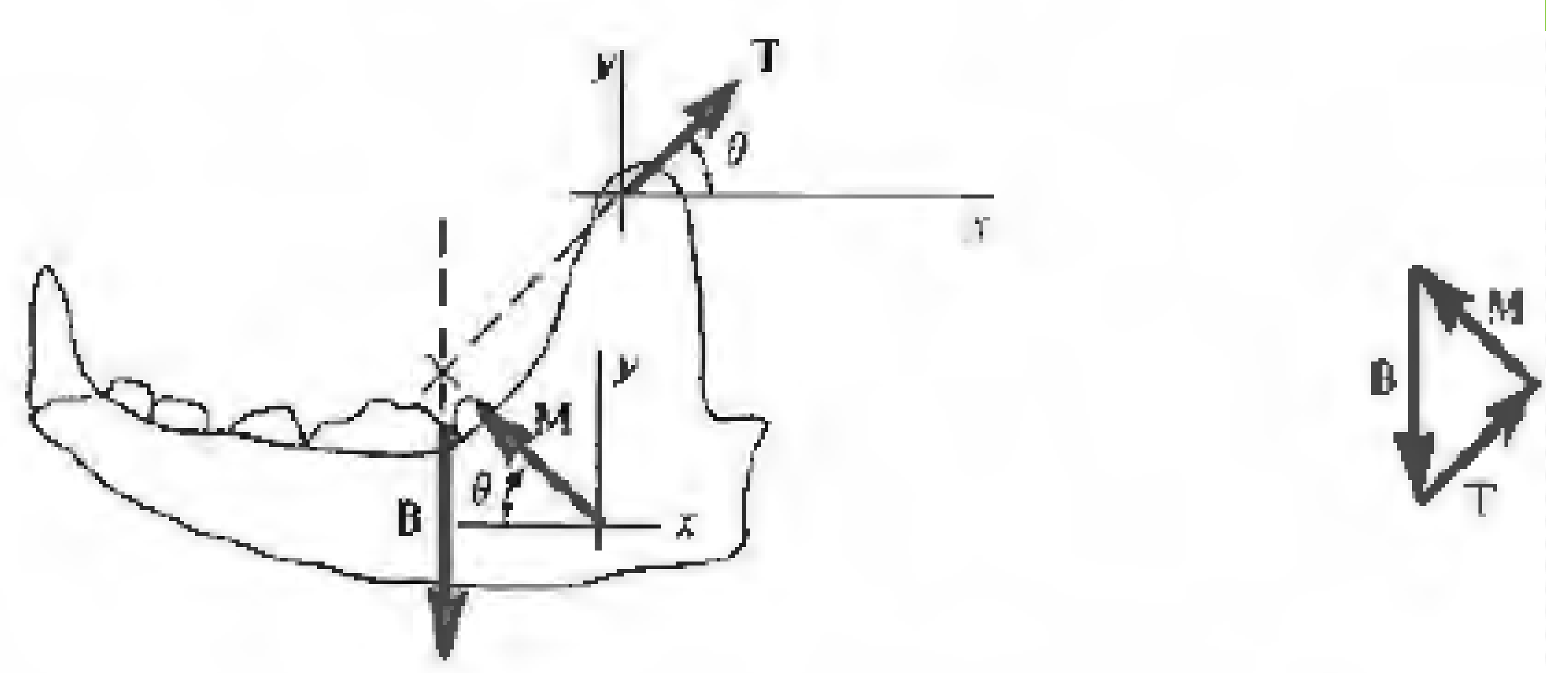
$$x_B . B - x_R . R = 0 \quad \Rightarrow R = \frac{x_B}{x_R} B$$

Como la fuerza neta sobre la mandíbula debe ser cero, *M – B – R = 0, la fuerza muscular requerida es*

$$M = B + R = B\left(1 + \frac{x_B}{x_R}\right)$$

Por ejemplo, si $x_B = 2x_R$ *y B = 1 N, entonces R = 2 N* y *M= 3 N.*
Así pues, la fuerza B sobre la comida es.menor que las fuerzas *M y R ejercidas por el músculo y* la articulación, respectivamente.
Se ve claramente que la solidez de la articulación es un factor que limita la fuerza con que puede morder el reptil y el margen de seguridad del músculo.

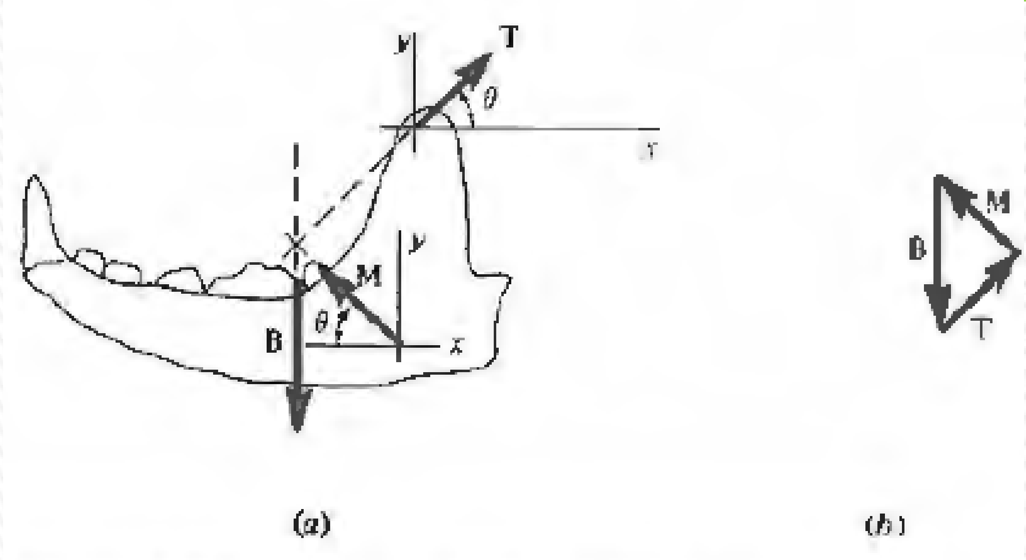
Las mandíbulas de los animales



Fuerzas sobre la mandíbula de un mamífero cuando la articulación no suministra fuerza alguna (fuerza R=0).

En la mandíbula de los mamíferos, la fuerza **M** se aplica asimismo a partir de la articulación y otra fuerza muscular, **T,** se halla también presente.
Si las líneas de acción de **T, M y B** se cortan en un punto, sus momentos con respecto a este punto son cero . Por consiguiente, la segunda condición de equilibrio, τ = 0, requiere que también la línea de acción de **R** pase por este punto. Además, cuando las fuerzas también satisfacen **T + M + B = 0,** *la articulación no debe proporcionar ninguna fuerza* ***R*** *para satisfacer la condición* Σ **F = 0.**

Las mandíbulas de los animales



Si **T + M + B** no es nula**,** o si sus líneas de acción no se cortan en un punto común, la articulación deberá proporcionar una fuerza **R**, que de todos modos será mucho menor que la correspondiente en el reptil.

Por lo tanto, la articulación no necesita una estructura tan grande y por lo tanto no limita el tamaño del músculo que puede tener el animal.

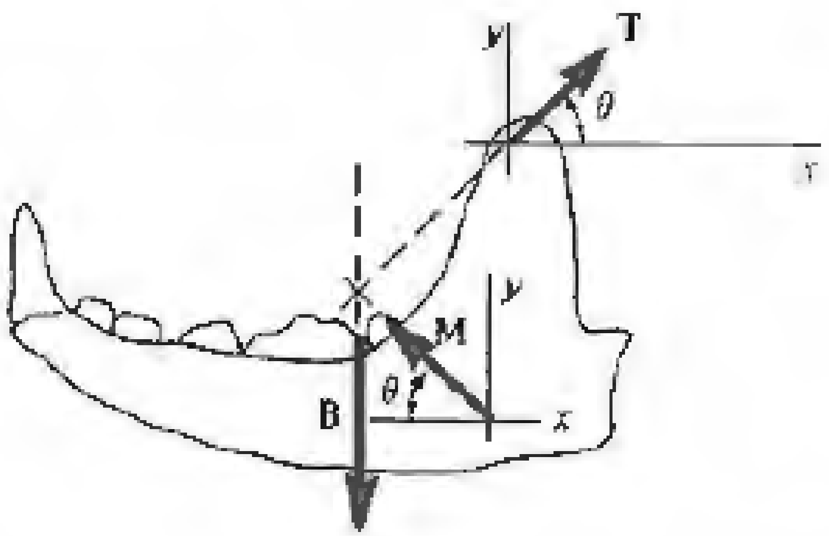
Los mamíferos carnívoros usan sus poderosos incisivos para desgarrar y transportar sus presas, mientras que los herbívoros muelen su comida lateralmente entre los molares.

El peso del músculo temporal de un carnívoro oscila entre la mitad y los dos tercios del peso total de los músculos que cierran las mandíbulas.

Sin embargo, en los herbívoros, este músculo sólo pesa una décima parte del total.

Ejemplo

Para ilustrar la superioridad de la mandíbula los mamíferos, supongamos que las fuerzas musculares **T** y **M** de la figura forman ambas un ángulo de θ= *45º con* la horizontal. ¿Cómo se ha de relacionar **M** con **T** para que la articulación no tenga que hacer ninguna fuerza **R** y cuánto valdrá la fuerza B ejercida sobre la comida?



(Suponer que las líneas de acción de B, T y M se cortan en un punto común, de modo que se cumple la segunda condición de equilibrio τ = 0)

Según x: T cos 45° = M cos 45° por lo que resulta que T=M

Según y: T sen 45° + M sen 45°= B como sen 45°= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo que resulta que: $B = \sqrt{2}\,M = \sqrt{2}\,T$

Por consiguiente, la fuerza *B ejercida por la mandíbula* sobre la comida es mayor que cualquiera de las dos fuerzas musculares *Ty M, y la fuerza debida a la articulación* es nula. ***Por el*** **contrario, en el caso del reptil hallamos que la fuerza *B* es menor que la fuerza muscular o la fuerza de la articulación**.

Centro de gravedad de los seres humanos

La información sobre el **centro de gravedad (CG) de los seres humanos** resulta útil en muchas aplicaciones.
El centro de gravedad de un objeto en caída libre sigue la misma trayectoria que una partícula simple, aun cuando el objeto esté girando o cambie de forma.
Ello simplifica el análisis del salto, la gimnasia y otras actividades atléticas.
Técnica para determinar el CG para hombres y animales:

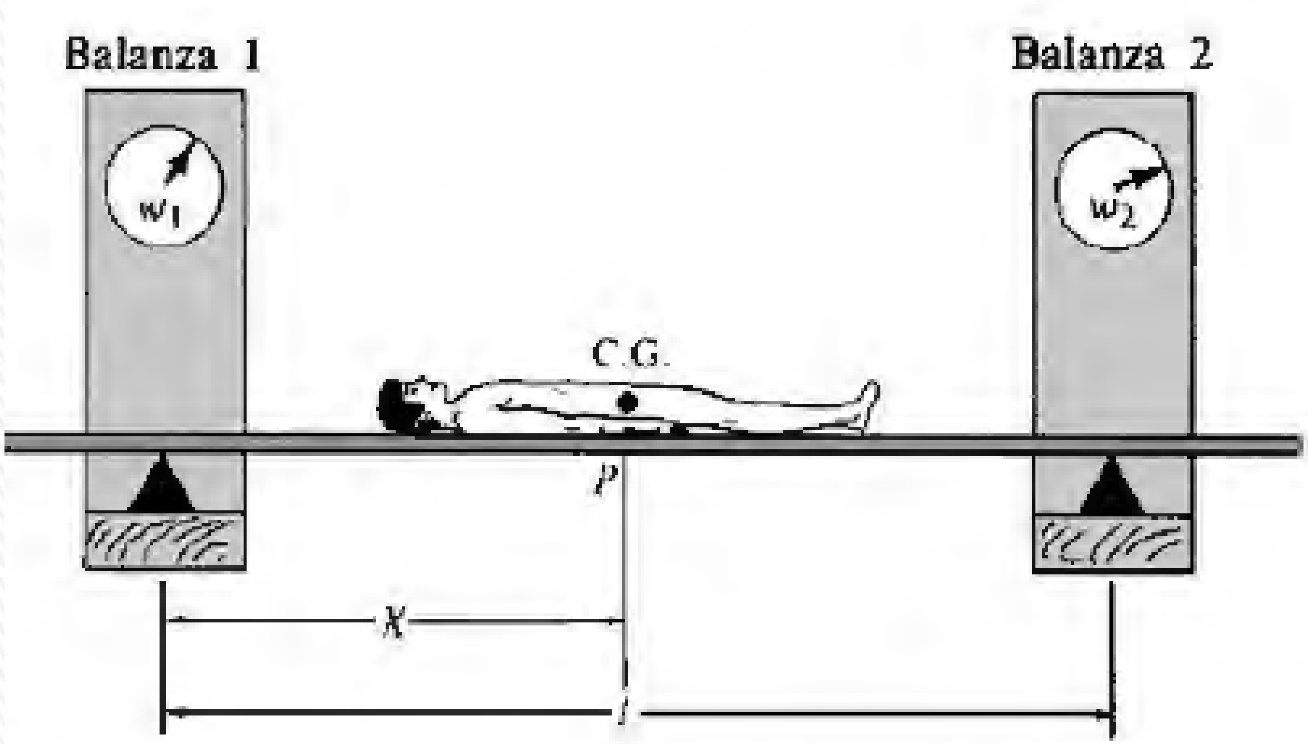


Tabla de longitud *l sostenida en sus extremos por soportes* que descansan sobre balanzas ajustadas de manera que su cero corresponda a la tabla sola.
Cuando la persona se tiende sobre la tabla, las balanzas marcan w_1 y w_2, *respectivamente.*

$$x \cdot w_1 = (l - x)\, w_2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{w_2}{w_1 + w_2}\, l$$

Centro de gravedad de los seres humanos

La medida se repite dos veces más, primero con el individuo de pie y luego con el individuo girado 90°.
De este modo se determinan las tres coordenadas del CG.

La medida detallada de las masas, los tamaños y los centros de gravedad de las partes del cuerpo es difícil y los resultados varían según los individuos.
Los datos para un hombre típico se dan en las figuras y en la tabla siguientes:

Masas y centros de gravedad de partes del cuerpo del hombre de las Figs. 4.57 y 4.58. Su masa total es m y su altura es h. Por ejemplo, si su masa es 70 kg, entonces la masa de su tronco y cabeza es $0{,}593\,m = 0{,}593\,(70\text{ kg}) = 41{,}5$.

		Posición del centro de gravedad de las distintas partes del cuerpo			
		Fig. 4.57		Fig. 4.58	
Parte	Masa	x	y	x	y
Tronco y cabeza	$0{,}593m$	$0{,}10\,h$	$0{,}70\,h$	$0{,}26\,h$	$0{,}52\,h$
Brazos	$0{,}053m$	$0{,}14\,h$	$0{,}75\,h$	$0{,}35\,h$	$0{,}45\,h$
Antebrazos y manos	$0{,}043m$	$0{,}24\,h$	$0{,}64\,h$	$0{,}34\,h$	$0{,}29\,h$
Muslos	$0{,}193m$	$0{,}12\,h$	$0{,}42\,h$	$0{,}11\,h$	$0{,}40\,h$
Piernas y pies	$0{,}118m$	$0{,}10\,h$	$0{,}19\,h$	$0{,}17\,h$	$0{,}18\,h$

Centro de gravedad de los seres humanos

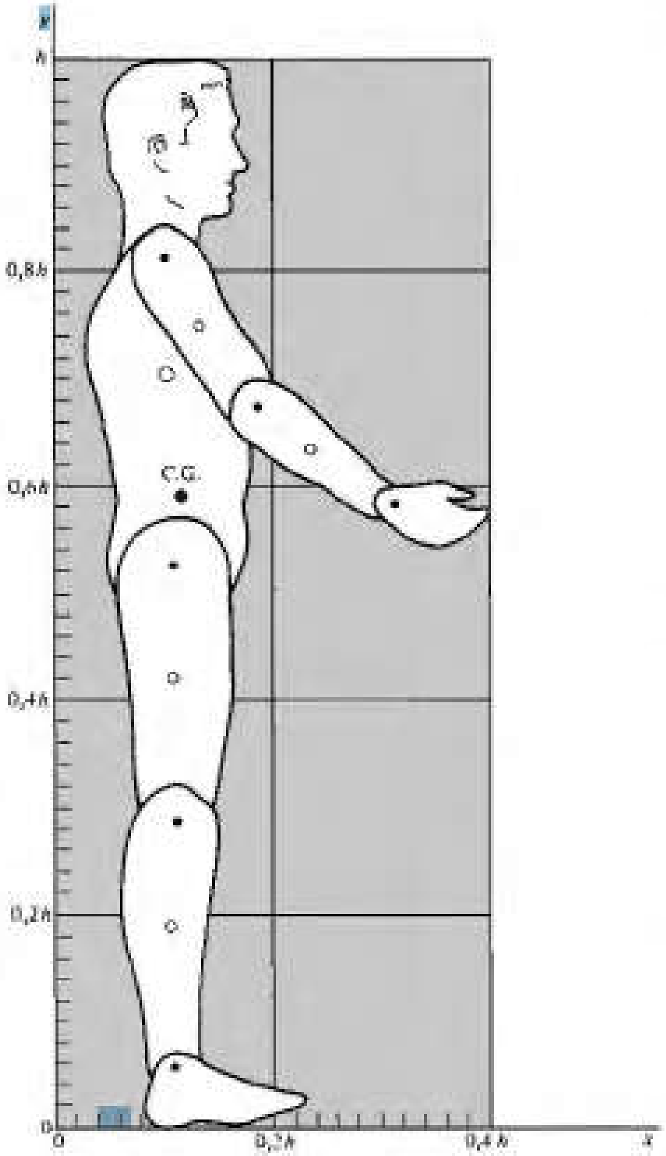


Figura 4.57 Extremidades, posición de las articulaciones (círculos negros) y posición de los centros de gravedad (círculos blancos) de varias partes del cuerpo de un hombre típico. (Adaptado de Williams y Lissner.)

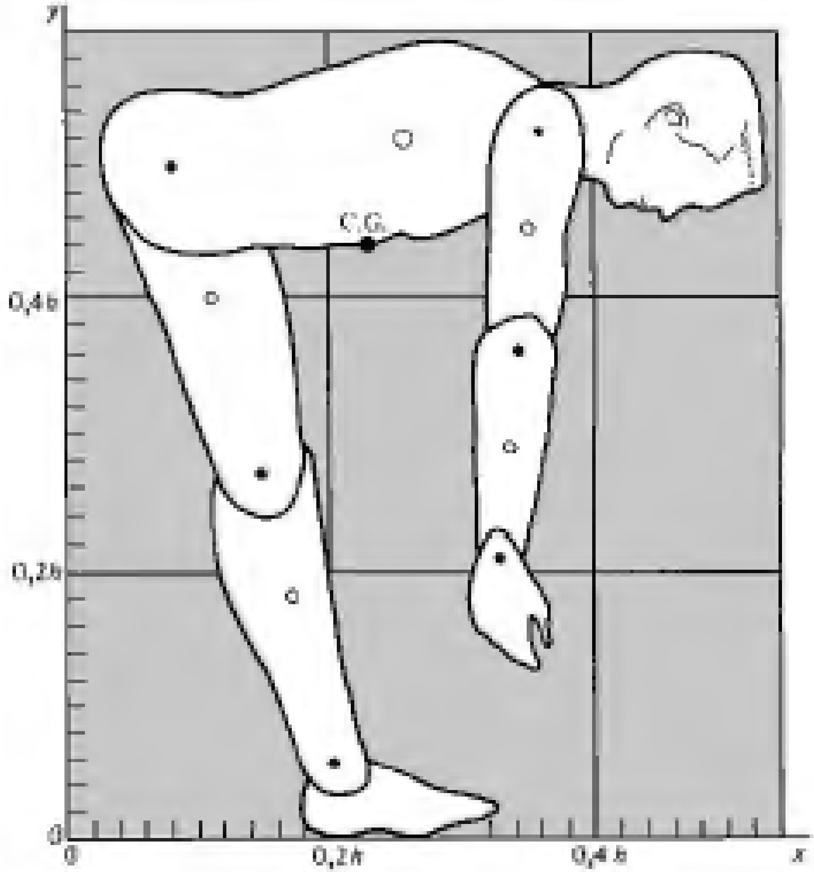
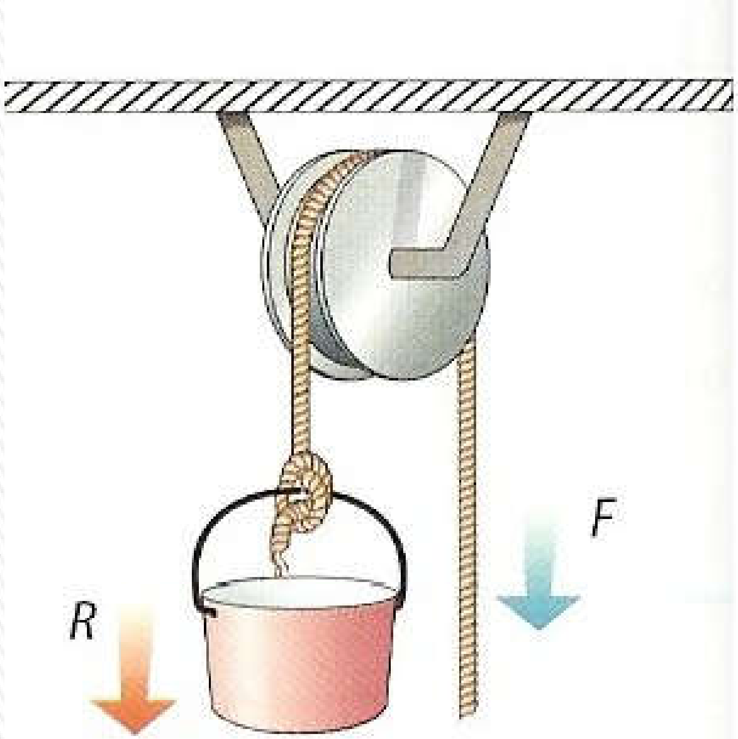
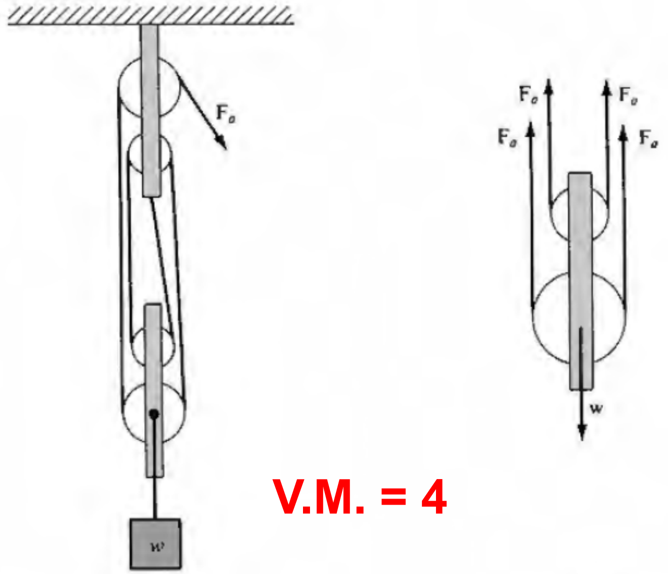


Figura 4.58 El hombre de la Fig. 4.57 aparece ahora inclinado, de modo que su espalda queda casi horizontal. Obsérvese que su centro de gravedad está todavía sobre los pies. (Adaptado de Williams y Lissner.)

Sistemas de poleas

Una sola polea se utiliza para cambiar el sentido de una fuerza, mientras que las combinaciones de varias poleas pueden utilizarse para reducir la fuerza que se necesita para levantar una carga pesada.
Si el rozamiento en los soportes es despreciable, la tensión de equilibrio en el cable o cuerda es la misma a cada lado de la polea.
Esta propiedad se utiliza para discutir algunos dispositivos de poleas típicos. Suponemos en ellos que el rozamiento es despreciable y que cuerdas y poleas tienen masa nula.

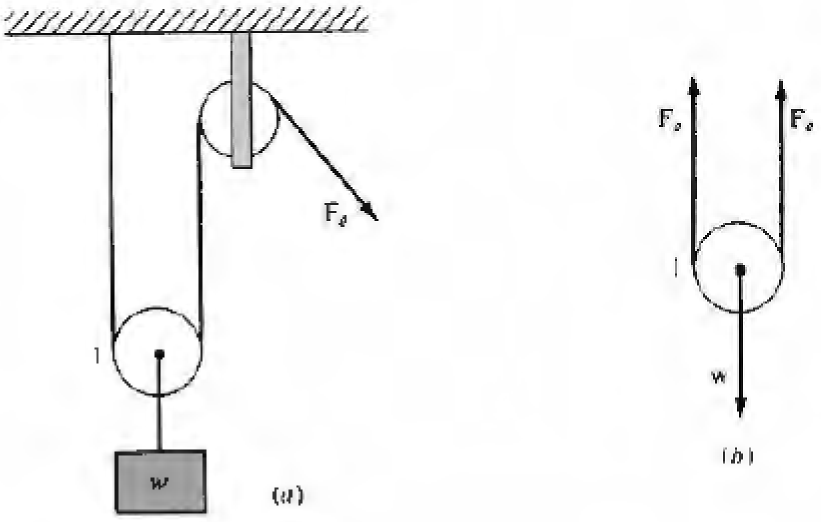




V.M. = 4

La ventaja mecánica del sistema es igual al número de cuerdas paralelas que sostienen la polea a la cual la carga va atada.
Esta regla *no se aplica cuando, como en el ejemplo siguiente,* las fuerzas aplicadas a la carga no son paralelas.

Sistemas de poleas



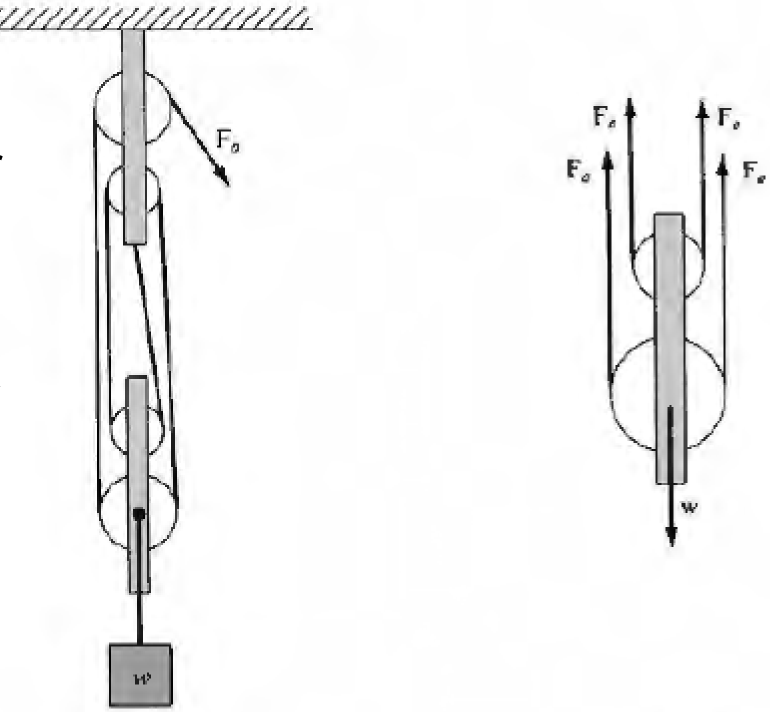
¿Qué fuerza F se necesita aplicar para levantar el peso w?

Fuerzas sobre polea 1 se muestran en la figura: *la cuerda es continua y la tensión a ambos lados* de la polea es la misma.

Si el peso se levanta a velocidad constante, el sistema se halla en equilibrio.

Por lo tanto: *2F - w = 0, y F.= w/2.*

La fuerza necesaria es sólo la mitad del peso y la ventaja mecánica es VM= 2



¿Qué fuerza F es necesario aplicar para levantar el peso w con el sistema de poleas de la figura?

De nuevo, la tensión en cada segmento vertical de la cuerda es la misma, por lo que *4F - w = 0 y F = w/4.*

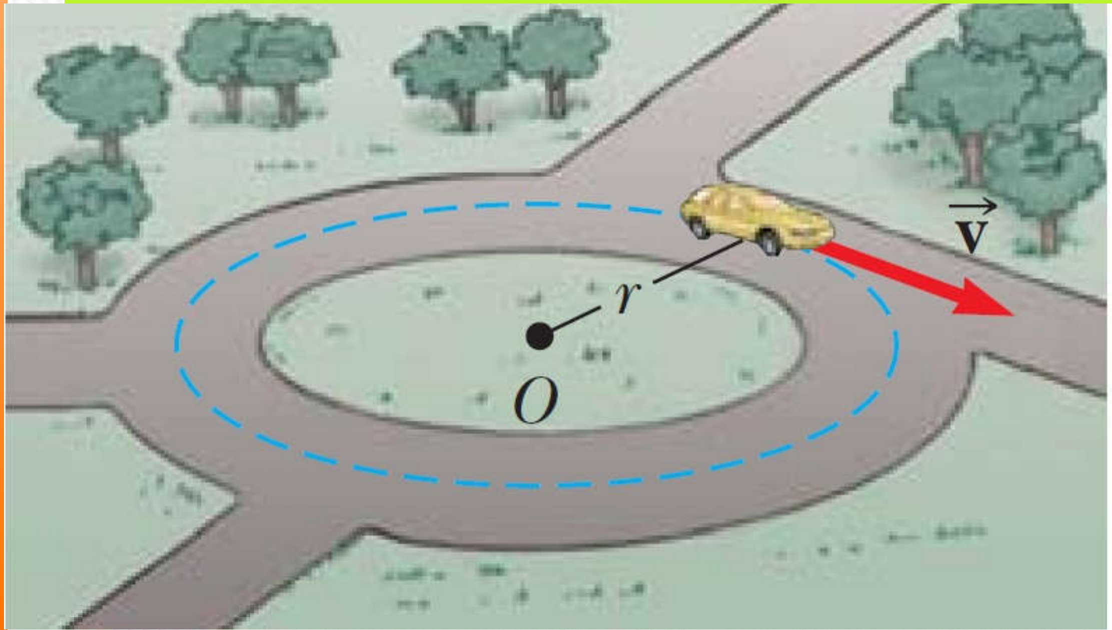
La ventaja mecánica de este sistema es

VM = w/F = 4

13- Movimiento circular, rotación de un rígido y aplicaciones de las leyes de Newton

Movimiento circular, rotación de un rígido y otras aplicaciones de las leyes de Newton: La segunda ley aplicada al movimiento circular, Aceleración angular y momento de inercia

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME



Un automovil se mueve en una trayectoria circular con *rapidez constante v:* este tipo de movimiento se conoce como **movimiento circular uniforme (MCU).**

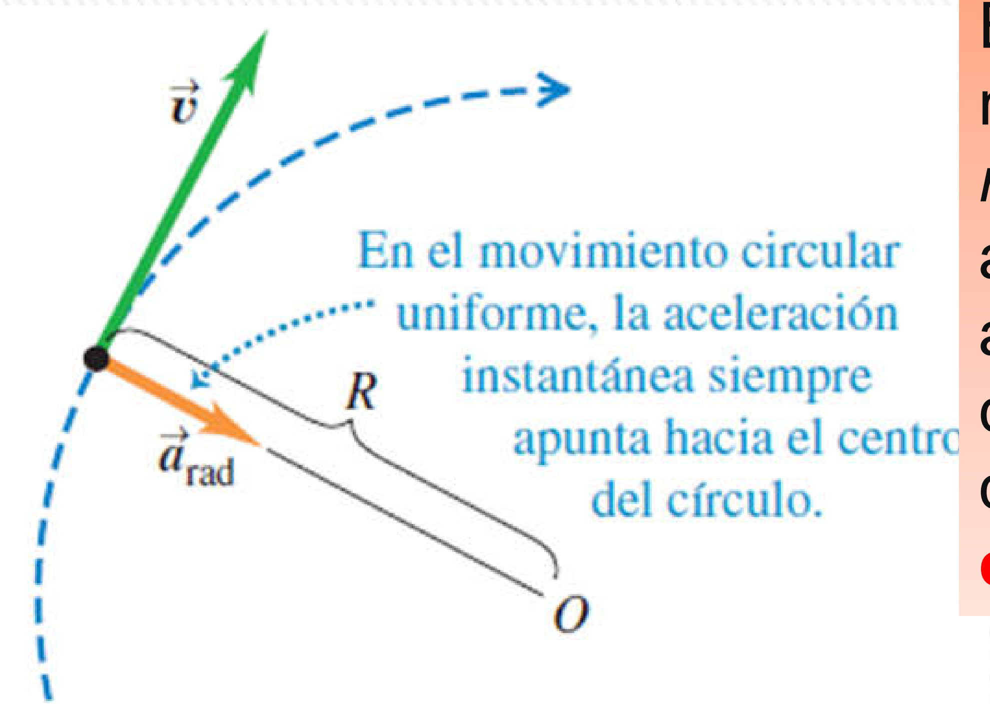
La **aceleración** depende del **cambio en la *velocidad***, *y como la velocidad* es una cantidad vectorial, puede ocurrir en dos formas: por un **cambio en la *magnitud de la velocidad*** *y por un* ***cambio en* la *dirección de la velocidad***.

La última situación ocurre para un objeto que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular.

El vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria del objeto y perpendicular al radio de la trayectoria circular.

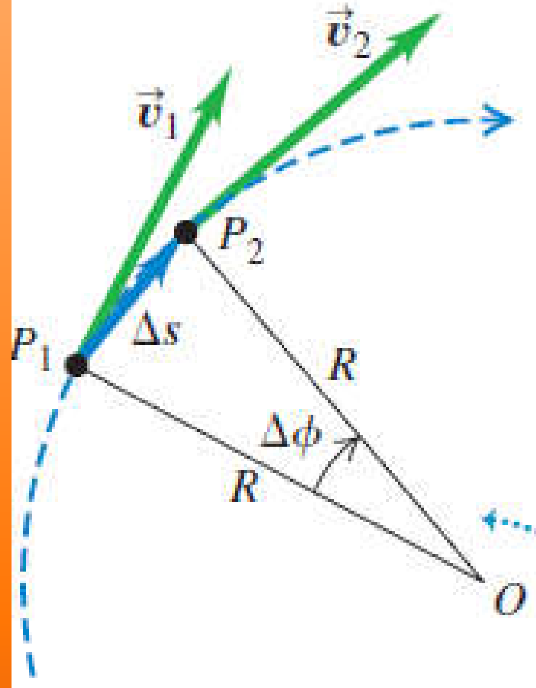
MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

El vector aceleración en MCU siempre es perpendicular a la trayectoria y siempre apunta hacia el centro del círculo.
Si eso no fuera cierto, habría una componente de la aceleración paralela a la trayectoria, paralela al vector velocidad, lo que provocaría a un cambio en la rapidez del móvil a lo largo de la trayectoria, esto contradice con que el móvil se mueve con rapidez constante a lo largo de la trayectoria.



En un MCU: la partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante y el* vector aceleración es perpendicular a la trayectoria y se dirige al centro de la trayectoria circular: **aceleración centrípeta.**

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME



La partícula se mueve de P_1 a P_2 en Δt, siendo las velocidades $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ respectivamente

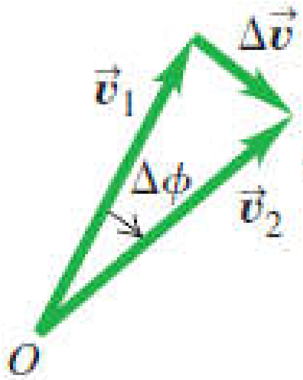
$$\Delta\overline{v} = \overline{v_2} - \overline{v_1}$$

Observar que: $\overline{v_1} + \Delta\overline{v} = \overline{v_2}$

Por perpendicularidad, los triángulos señalados son semejantes:

$$\frac{\Delta v}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \quad \rightarrow \Delta v = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

b) El cambio correspondiente en velocidad y aceleración media



Estos dos triángulos son semejantes.

El módulo de la aceleración media vale:

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

Por tanto la aceleración (que es radial) vale:

$$a = a_{radial} = \frac{v^2}{R}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

$$a = a_{radial} = \frac{v^2}{R}$$

La aceleración en el movimiento circular uniforme siempre apunta al centro del círculo y se le llama **aceleración centrípeta**.

En el movimiento circular uniforme, la magnitud a_{rad} de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la rapidez v dividido entre el radio R del círculo; su dirección es radial y apunta hacia adentro sobre el radio

El periodo T del movimiento*, es el tiempo que dura* una revolución (una vuelta completa alrededor del círculo).
En un tiempo *T, la partícula* recorre una distancia igual a la circunferencia 2πR*, así que su rapidez es:*

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$a = a_{radial} = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Ejemplo

La Tierra tiene 6380 km de radio y gira una vez sobre su eje en 24 horas.
a) ¿Qué aceleración radial (a_{rad}) tiene un objeto en el ecuador? Dé su respuesta en m/s^2 y como fracción de g.
b) Si a_{rad} en el ecuador fuera mayor que g, los objetos saldrían volando hacia el espacio. ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación de la Tierra para que esto sucediera?

$$R = 6380\ km = 6{,}38 \times 10^6 m$$

$$T = 24\ h = 24 \times 60 \times 60\ seg = 86.400\ s$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(6{,}38 \times 10^6)}{86400} = 463{,}97\ m/s$$

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \frac{463{,}97^2}{6{,}38\times10^6} = 0{,}03374\ m/s^2$$

a_{rad}= 3,4×10^{-2} m/s^2 = 3,4×10^{-3} g

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a_{rad}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a_{rad}}} = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}38\times10^6}{9{,}8}} = 5069{,}64\ s$$

T = 1h 24 min 30 s

MOVIMIENTO CIRCULAR NO UNIFORME

Trayectoria circular y la rapidez varía.

La **aceleración radial** sigue valiendo lo mismo que en el uniforme, y *siempre es perpendicular* a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo.
Su valor a_{rad} *no es constante. La aceleración radial (centrípeta) es mayor en el punto del* círculo donde la rapidez es mayor.

La aceleración tiene también una componente de aceleración *paralela a la velocidad instantánea* (a_{tan})

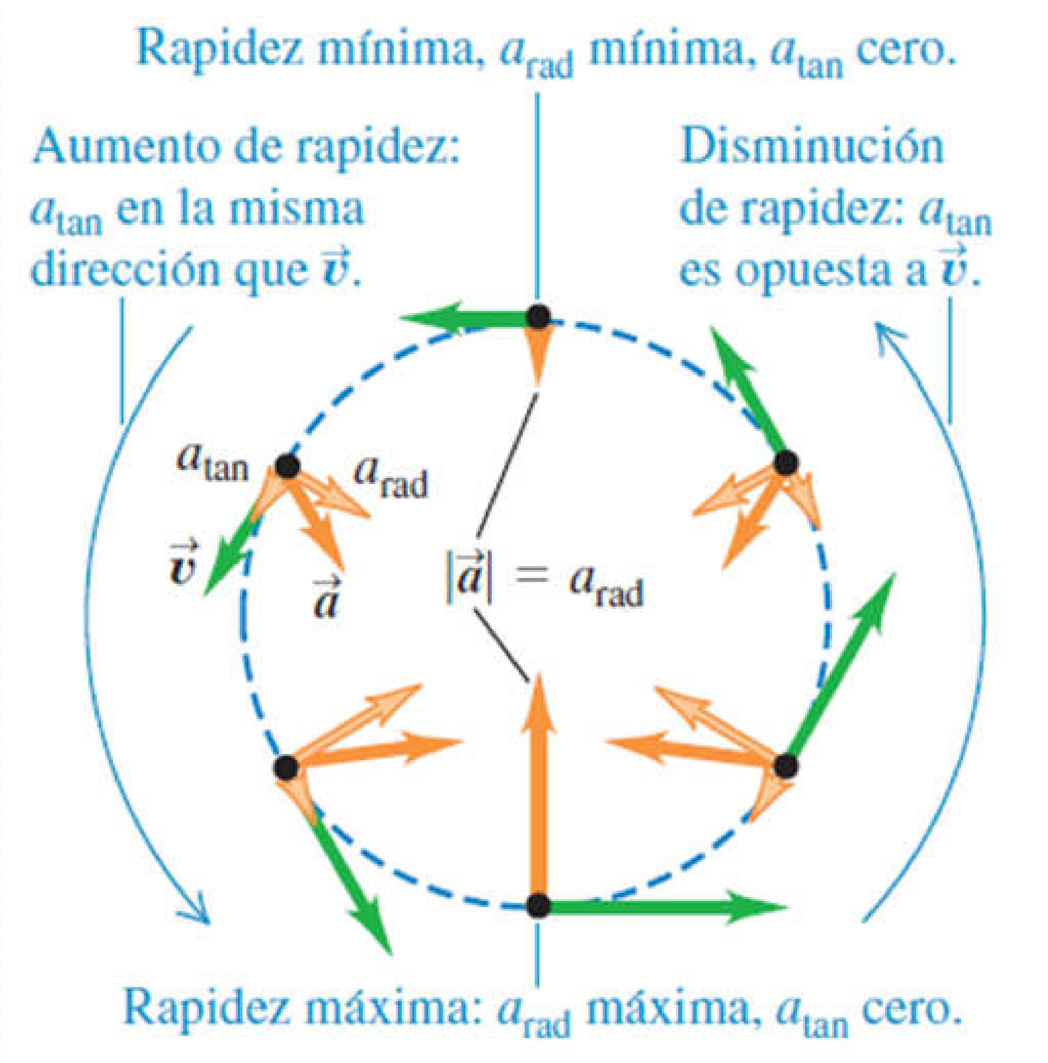
La componente de ***aceleración tangencial*** $\boldsymbol{a_{tan}}$ *es igual a la tasa* de cambio de la *rapidez*

$$a_{radial} = \frac{v^2}{R} \qquad a_{tangencial} = \frac{d|\bar{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

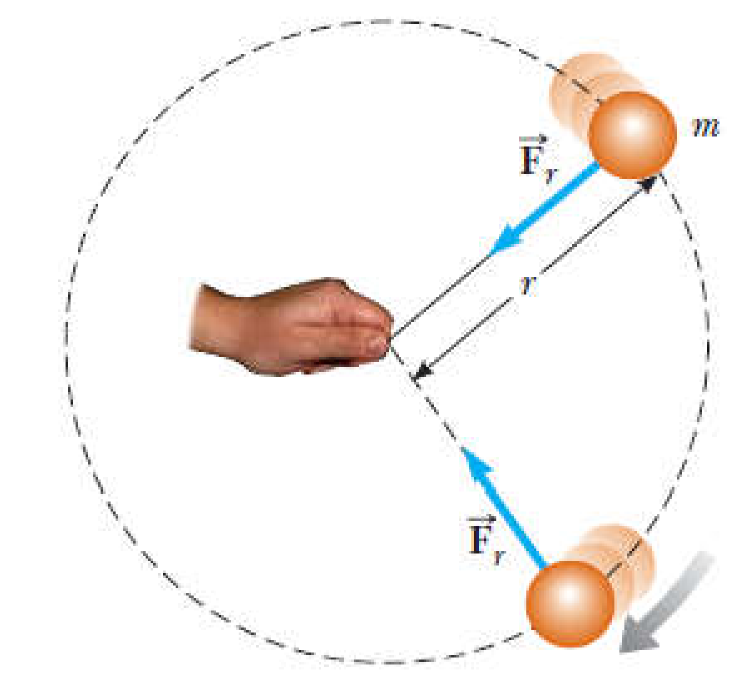
La componente tangencial tiene el mismo sentido que la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando.

MOVIMIENTO CIRCULAR NO UNIFORME

Movimiento de un carrito de montaña rusa con rapidez variable (se modela como partícula que se mueve en círculo vertical)



Segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme



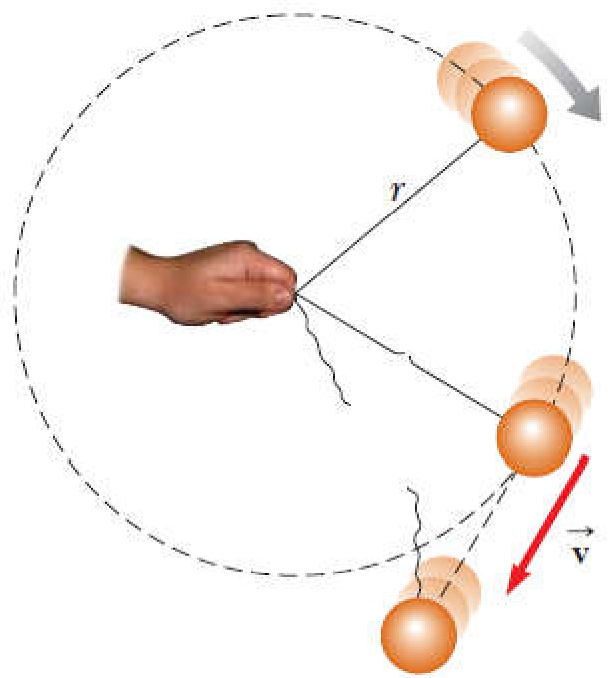
Consideremos una bola de masa *m que se ata a una cuerda de longitud r y se la hace* girar con rapidez constante en una trayectoria circular horizontal, sobre una mesa sin fricción, como se muestra.

¿Por qué la bola se traslada en un círculo? De acuerdo con la primera ley de Newton, la bola se movería en una línea recta si no hubiese fuerza en ella; sin embargo, la cuerda evita el movimiento a lo largo de una línea recta al ejercer en la bola una fuerza radial $\mathbf{F}_r$ que la hace seguir la trayectoria circular.

Esta fuerza se dirige a lo largo de la cuerda hacia el centro del círculo, como se muestra en la figura.
Si se aplica la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial, la fuerza neta que causa la aceleración centrípeta se relaciona con la aceleración así:

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

Segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme

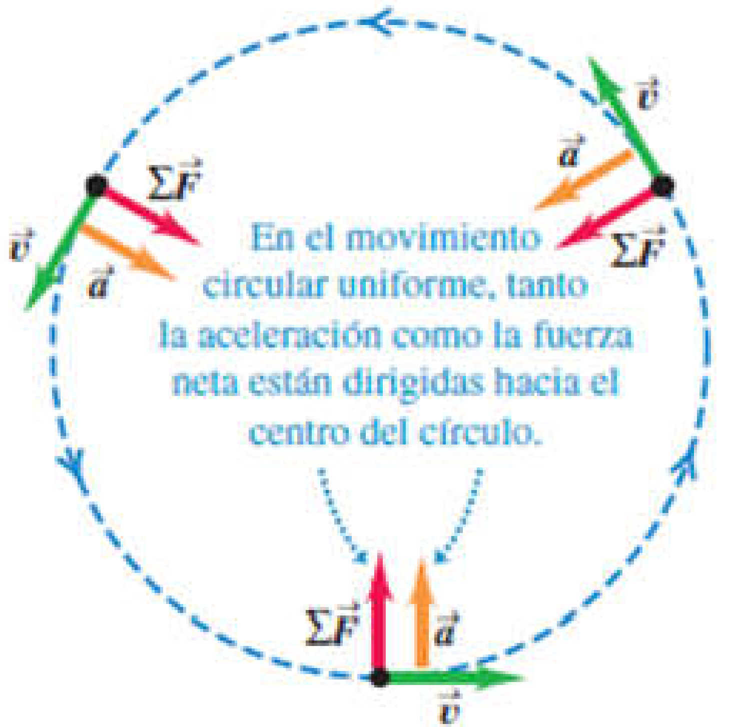


La fuerza que causa la aceleración centrípeta (la tensión de la cuerda) actúa hacia el centro de la trayectoria circular y genera un cambio en la dirección del vector velocidad.

Si esa fuerza desapareciera, por ejemplo si se rompiera la cuerda, el objeto ya no se movería en su trayectoria circular, se movería a lo largo de una trayectoria en línea recta tangente al círculo, como se muestra en la figura.

Si la cuerda se rompe en algún instante, la bola se mueve a lo largo de la trayectoria en línea recta que es tangente al círculo en la posición de la bola en ese instante.

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR



Cuando una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, su aceleración siempre es hacia el centro del círculo (perpendicular a la velocidad instantánea).
La magnitud a_{rad} *de la aceleración es constante y está dada en términos de la rapidez v y el radio R* del círculo por

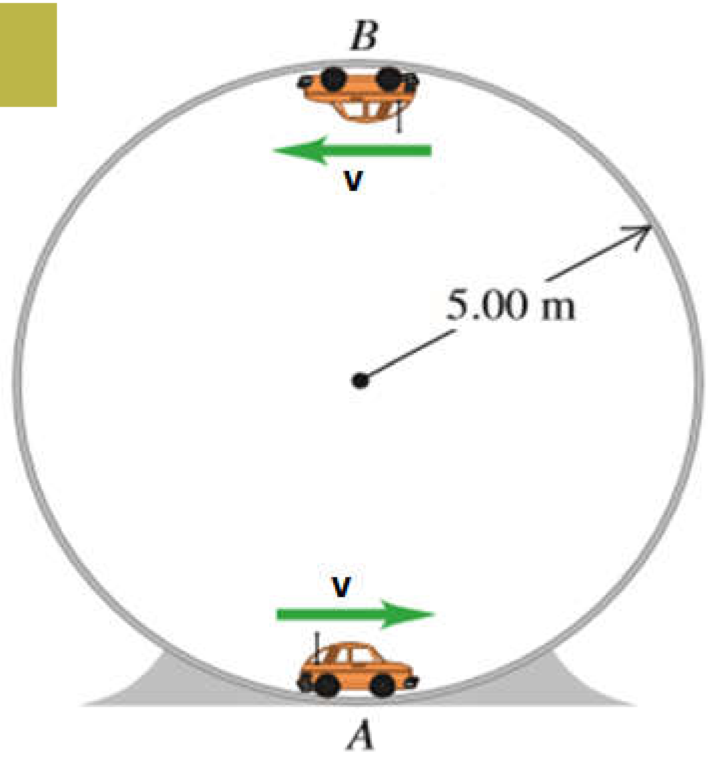
$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)}$$

2da. Ley de Newton aplicada a la dirección radial en un movimiento circular uniforme:

$$F_{\text{neta}} = ma_{\text{rad}} = m\frac{v^2}{R}$$

Ejemplo: ejercicio 4.2

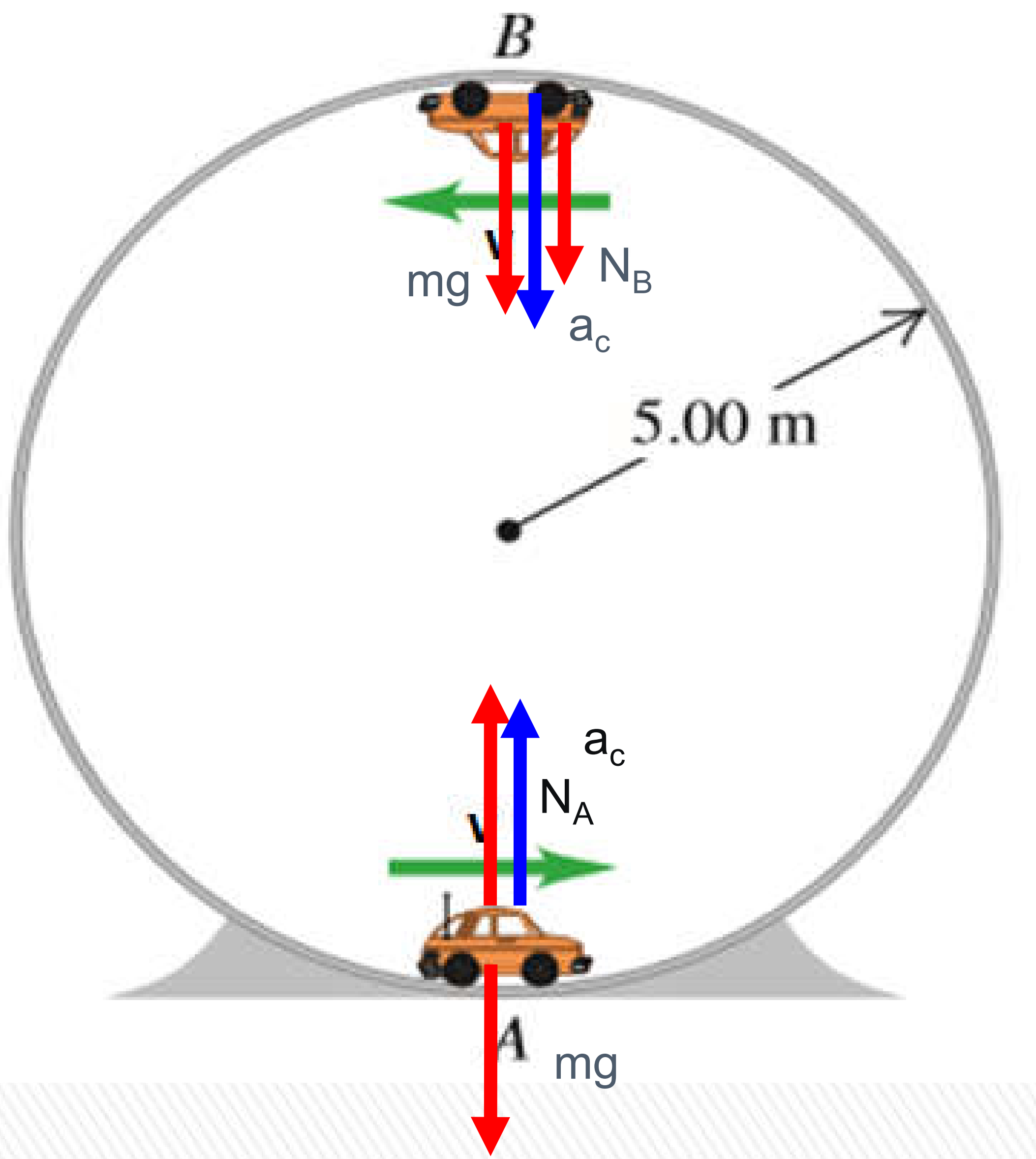
Un carrito con masa de 0,800 kg viaja con rapidez constante en el interior de una pista circular vertical de radio igual a 5,00m. Si la fuerza normal ejercida por la pista sobre el carrito cuando está en la parte superior de la pista (punto B) es de 6,00N, ¿cuál es la fuerza normal sobre el carrito cuando se encuentra en la parte inferior de la pista (punto A)?



Como la rapidez es constante, la aceleración radial del carrito es constante, es la aceleración centrípeta.

Para calcular la normal en A (N_A), debo aplicar la 2da. Ley de Newton en el punto A, y relacionar las fuerzas actuantes y la aceleración. Pero desconozco la aceleración…que depende la rapidez. Entonces debo plantear la 2da. Ley de Newton en el punto B… donde conozco cuánto vale la normal (N_A = 6,00 N)

Diagramas de cuerpo libre (DCL)



Vamos a representar los DCL en los puntos B y A

En B: actúan 2 fuerzas el peso del auto mg y la normal $N_{B,}$ ambas dirigidas hacia el centro.

Además vamos a representar la aceleración centrípeta a_c, dirigida hacia el centro.

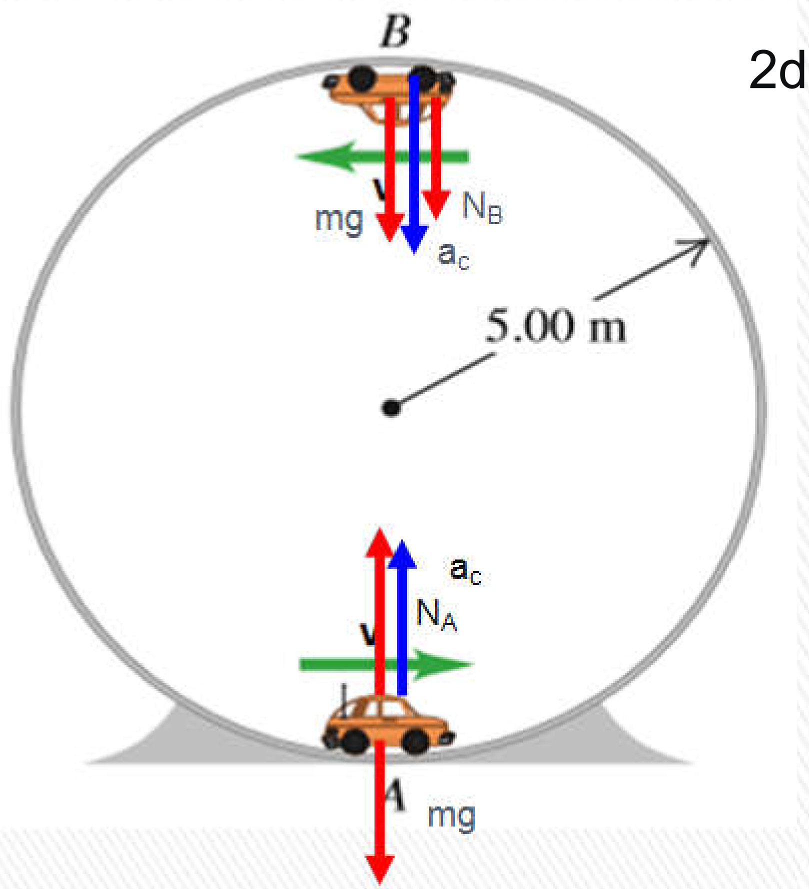
En A: actúan 2 fuerzas el peso del auto mg (hacia abajo) y la normal $N_{B,}$ hacia arriba.

Incluimos además la aceleración centrípeta a_c, dirigida hacia el centro.

Ejemplo: ejercicio 4.2

Aceleración centrípeta: $a = \frac{v^2}{R}$

Diagramas de cuerpo libre (DCL)



2da. Ley de Newton en B: $ma = N_B + mg$

2da. Ley de Newton en A: $ma = N_A - mg$

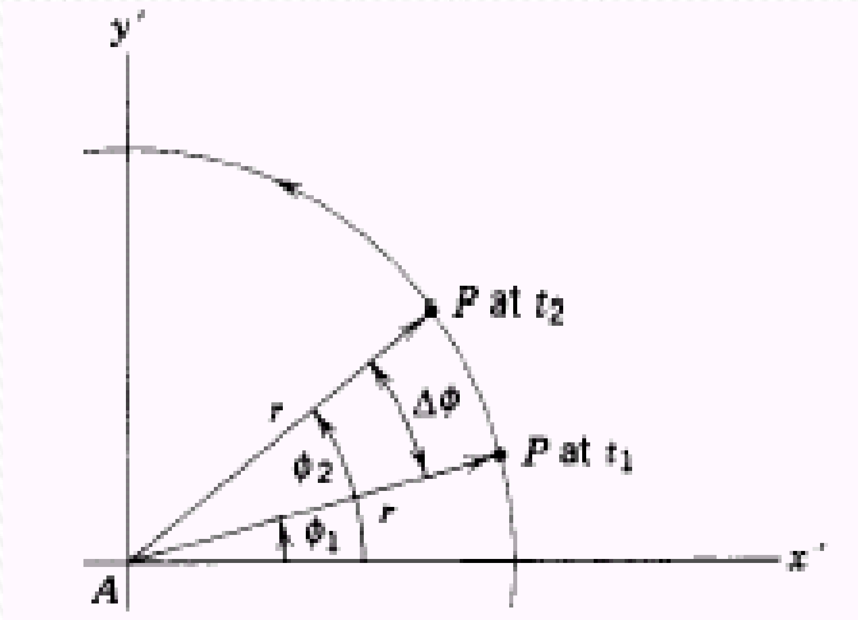
$N_B + mg = N_A - mg$

$N_A = N_B + 2mg = 6{,}00 + 2(0{,}800)\ 9{,}8 =$

$\boxed{N_A = 21{,}7\ N}$

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES

Movimiento de rotación- **Rotación pura** si cada punto del cuerpo rígido se mueve en trayectoria circular. Los centros de estos círculos están sobre una recta común (**eje de rotación)**.



Variables de rotación-

Ángulo ϕ: posición angular de la línea de referencia AP (en radianes) y con sentido positivo de rotación antihorario.

ϕ está dado en radianes por la relación:

$$\boxed{\phi = \frac{s}{r}}$$

s es el arco y *r* es el radio de la cfa

$$1\ rad = \frac{180º}{\pi} \cong 57,3º$$

Desplazamiento angular de P será $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES

Velocidad angular media:

$$\omega_{\text{media}} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Velocidad angular ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$$

Aceleración angular media

$$\alpha_{\text{media}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Aceleración angular (α)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$1\ \text{rev/s} = 2\pi\ \text{rad/s} \qquad \text{y} \qquad 1\ \text{rev/min} = 1\ \text{rpm} = \frac{2\pi}{60}\ \text{rad/s}$$

Velocidad angular positiva si el cuerpo gira en la dirección de Φ creciente.

Para un cuerpo rígido tanto ω como α son únicos (valen lo mismo para cada punto).