Práctico 5

1. Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular: $4A + B, \quad (2A)^t - 3B^t, \quad AB, \quad CA, \quad CA^2B.$

2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificar que vale $AB = AC$. Este ejemplo muestra que en matrices no vale la propiedad cancelativa del producto. Es decir, que valga $AB = AC$ con $A \neq 0$, no implica $B = C$.

3. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Verificar que valen $AB = BA = O, \quad AC = A, \quad CA = C, \quad C^2 = C, \quad A^2 = A.$

4. Resolver las siguientes ecuaciones matriciales

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Un laboratorio fabrica tres productos A, B y C, cada uno de los cuales requiere ciertas cantidades de tres tipos de materia prima X, Y y Z, y de mano de obra. Los requerimientos por unidad de cada producto están resumidos en la siguiente matriz

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Las necesidades de materias primas se dan en kg por unidad y las de mano de obra en horas (de trabajo) por unidad. Por ejemplo, la primera fila de R indica que para producir una unidad de producto A, se necesita 2 kg de materia prima X, 4 kg de Y, 5 kg Z y 5 horas de mano de obra.

   a) Supongamos que queremos producir ciertas cantidades a, b, c de productos de tipo A, B, C. Sean x, y, z las cantidades de kilos de las materias primas X, Y, Z y t la cantidad de horas de mano de obra, que se necesitan para producirlos. Se pide:

      1) Hallar las fórmulas que nos permiten calcular x, y, z, t en función de a, b, c.

      2) Encontrar una matriz P tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. ¿Qué relación hay entre P y R?

   b) Supongamos que las tres materias primas cuestan \$200, \$300 y \$150 por kg, respectivamente. El costo de mano de obra es de \$200 por hora. Si se fabrican 50, 100 y 40 productos de tipo A, B y C, respectivamente. ¿Cuál es el costo total de la producción?

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (indicando por qué) o falsas (dando un contraejemplo).

   a) Si la primera y tercera columnas de B son iguales, también lo son la primera y tercera columnas de AB.

   b) Si la primera y tercera filas son iguales en B, también lo son en AB.

   c) Si la primera y tercera filas son iguales en A, también lo son en AB.

   d) Si A y B son matrices $n \times n$ entonces

      1) $(AB)^2 = A^2B^2$;

      2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

      3) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

7. Sea $A \in M_{m\times n}$.

   a) Probar que A^tA y AA^t son matrices simétricas.

   b) Probar que vale $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$, que $\frac{1}{2}(A + A^t)$ es una matriz simétrica y que $\frac{1}{2}(A - A^t)$ es una matriz antisimétrica.

   c) Probar que si $B, C \in M_{m\times n}$ verifican que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$, entonces $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ y $C = \frac{1}{2}(A - A^t)$. *Sugerencia:* calcular $A + A^t$ y $A - A^t$, para $A = B + C$ como arriba.