ANUNCIOS

1- 1er. Parcial: Viernes 13 de mayo hora 16:00. En forma presencial

2- Tercer evaluación corta: Está en marcha hasta el sábado 7 de mayo. Unidad 3 (Dinámica: leyes del movimiento y equilibrio estático).

3- Consultas: Clase de consultas: sábados de 9:00 a 10:30 por Zoom. Enlace en EVA:
https://salavirtual-udelar.zoom.us/j/85497553389?pwd=TUFHY2c1Z3hvNnFycjNVZUw1b2Y2QT09

Me voy a conectar 30 minutos antes de cada clase virtual por si tienen consultas a realizar, en todo caso puedo ampliar el rango o eventualmente poner una clase especial a coordinar.

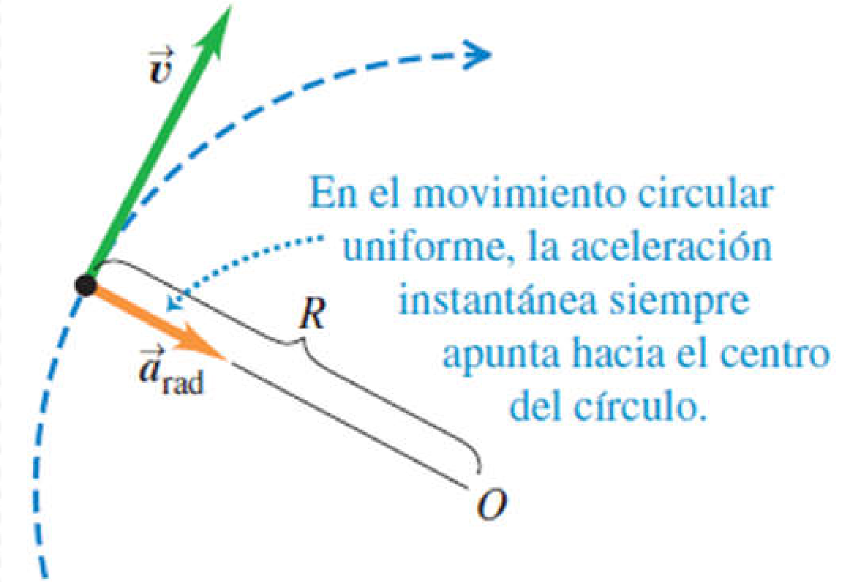
13- Movimiento circular, rotación de un rígido y aplicaciones de las leyes de Newton

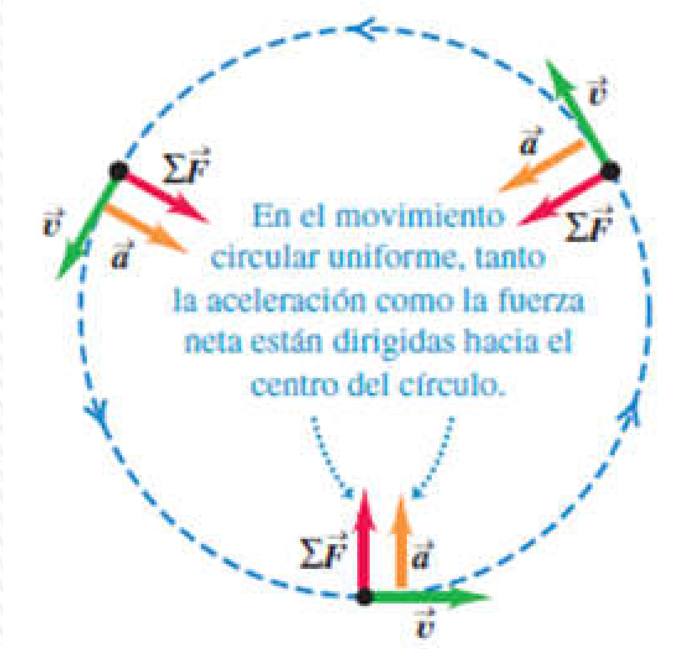
Movimiento circular, rotación de un rígido y otras aplicaciones de las leyes de Newton: La segunda ley aplicada al movimiento circular, Aceleración angular y momento de inercia

REPASO DE CLASE PASADA

Movimiento circular uniforme: el cuerpo describe una trayectoria circular con *rapidez constante y el* vector aceleración es perpendicular al vector velocidad, se dirige al centro del círculo **(aceleración centrípeta)** y vale:

$$a = a_{radial} = \frac{v^2}{R}$$





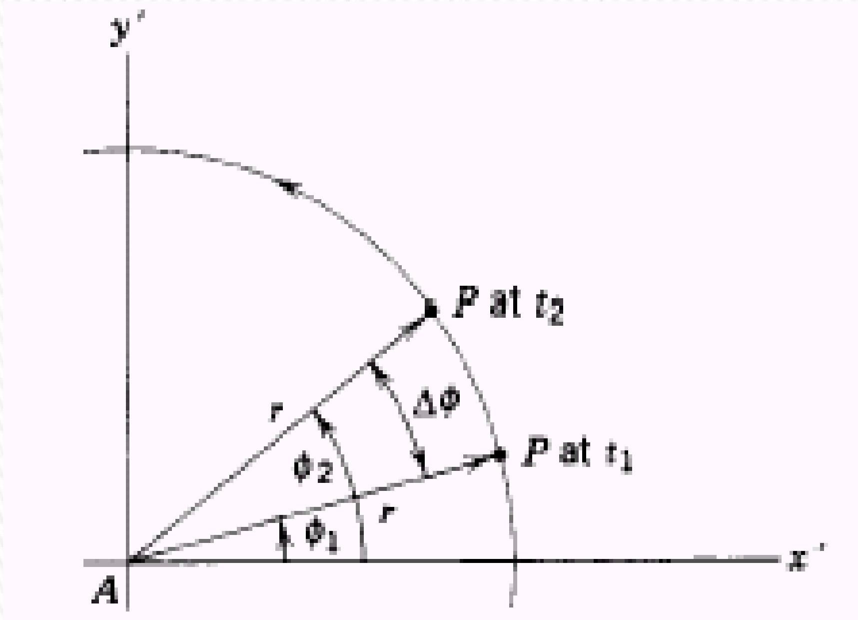
2da. Ley de Newton aplicada al MCU:
La fuerza neta tiene dirección radial y aplicada en ella se tiene:

$$F_{neta} = ma_{rad} = m\frac{v^2}{R}$$

Cinemática de movimiento rotacional:
Similar a la rectilínea con variables angulares: ángulo θ, velocidad angular ω y aceleración angular α

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES

Movimiento de rotación- Rotación pura si cada punto del cuerpo rígido se mueve en trayectoria circular. Los centros de estos círculos están sobre una recta común (**eje de rotación)**.



Variables de rotación-

Ángulo ϕ: posición angular de la línea de referencia AP (en radianes) y con sentido positivo de rotación antihorario.

ϕ está dado en radianes por la relación:

$$\boxed{\phi = \frac{s}{r}}$$

s es el arco y *r* es el radio de la cfa

$$1\ rad = \frac{180º}{\pi} \cong 57{,}3º$$

Desplazamiento angular de P será $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES

Velocidad angular media:

$$\omega_{\text{media}} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Velocidad angular ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$$

Aceleración angular media

$$\alpha_{\text{media}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Aceleración angular (α)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$1\ \text{rev/s} = 2\pi\ \text{rad/s} \qquad \text{y} \qquad 1\ \text{rev/min} = 1\ \text{rpm} = \frac{2\pi}{60}\ \text{rad/s}$$

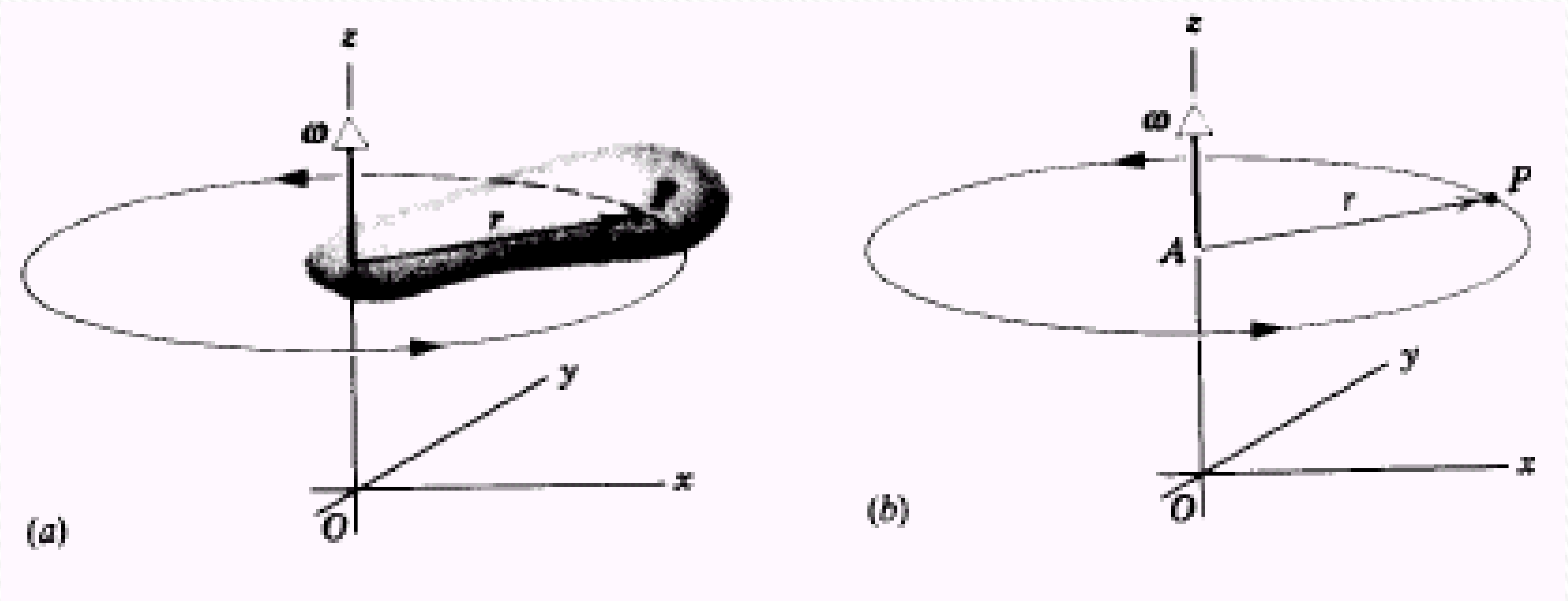
Velocidad angular positiva si el cuerpo gira en la dirección de Φ creciente.

Para un cuerpo rígido tanto ω como α son únicos (valen lo mismo para cada punto).

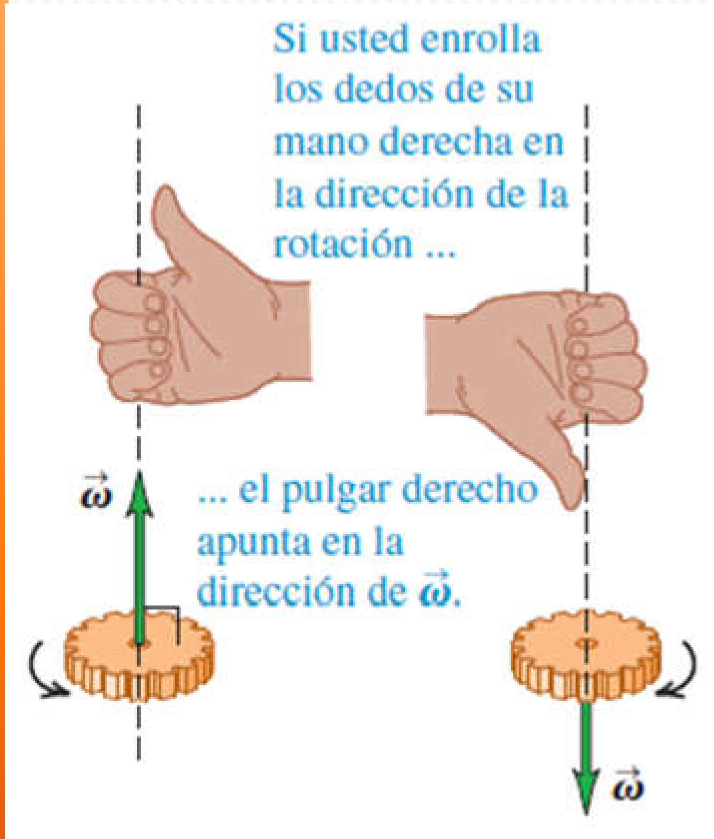
VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES COMO VECTORES

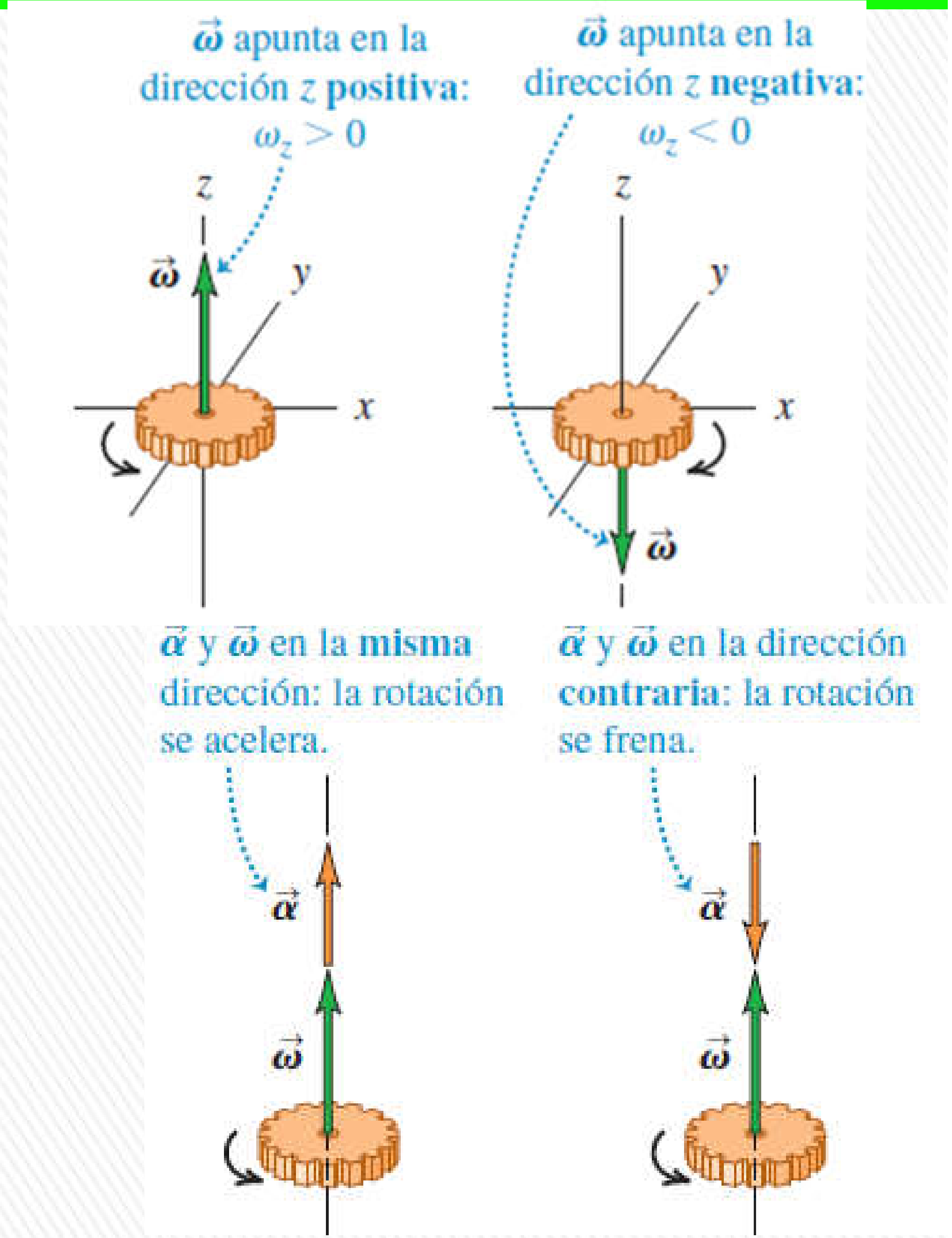
Las magnitudes angulares, también pueden representarse vectorialmente.

Se representan como vectores perpendiculares al plano de rotación, y con sentido dado por la regla de la mano derecha.



VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES COMO VECTORES





Rotación con aceleración angular constante

Las ecuaciones resultan ser similares a las ecuaciones vistas anteriormente para MRUA si sustituimos *x por* θ, v_x *por* ω_z, *y* a_x *por* α_z.

Consideramos que la aceleración angular α_z es constante

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t - 0} \qquad \omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$$

$$\omega_{med\ \ z} = \frac{\omega_z + \omega_{0z}}{2} \qquad \omega_{med-z} = \frac{\theta + \theta_0}{t - 0}$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \qquad \theta - \theta_0 = \frac{1}{2}[\omega_{0z} + (\omega_{0z} + \alpha_z t)]t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$$

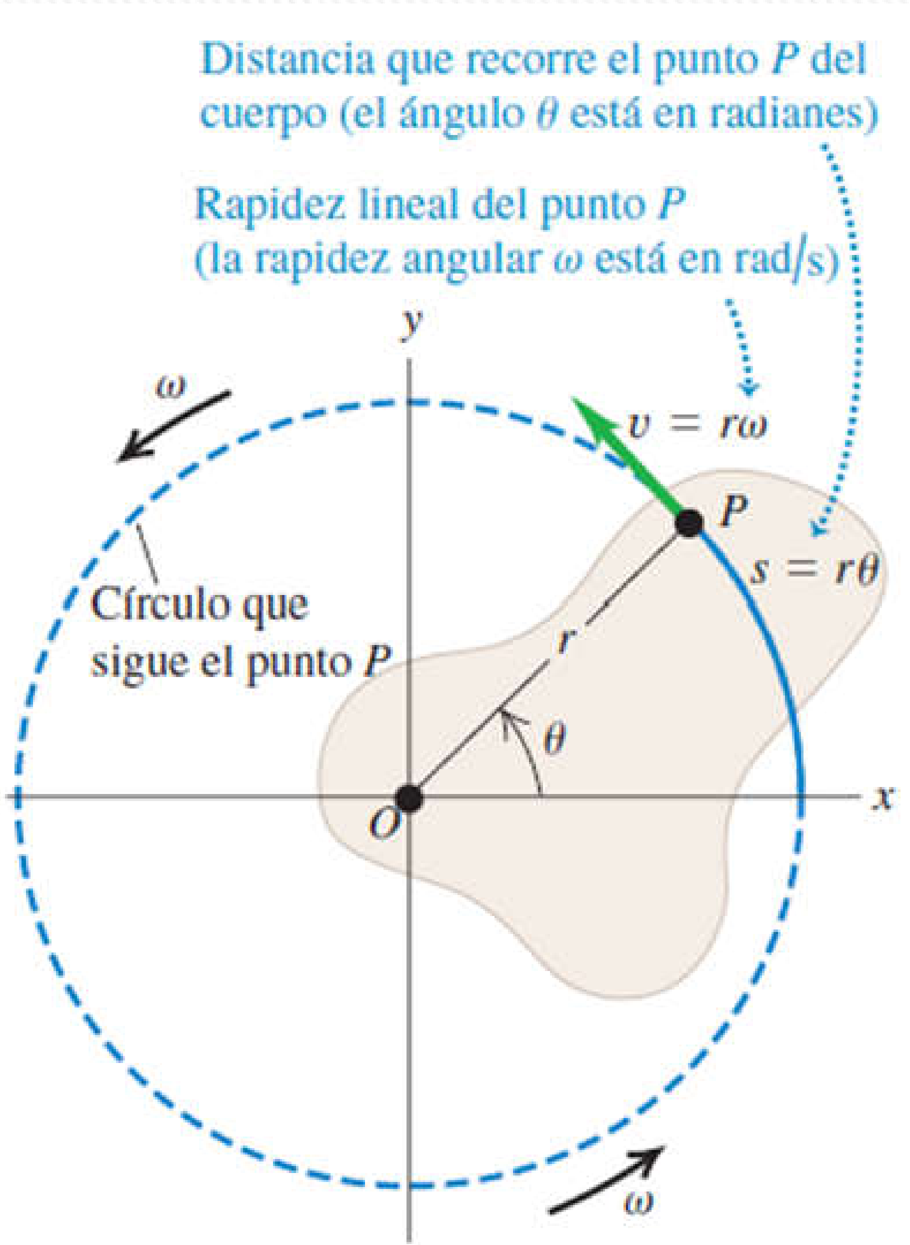
Rotación con aceleración angular constante

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$$

Tabla 9.1 Comparación del movimiento lineal y angular con aceleración constante

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante		Rotación sobre un eje fijo con aceleración angular constante	
$a_x = \text{constante}$		$\alpha_z = \text{constante}$	
$v_x = v_{0x} + a_x t$	(2.8)	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$	(9.7)
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	(2.12)	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$	(9.11)
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(2.13)	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$	(9.12)
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	(2.14)	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$	(9.10)

Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido



Cuerpo rígido girando alrededor de un eje fijo que pasa por O.

Las partículas se mueven en una trayectoria circular, en un plano perpendicular al eje.

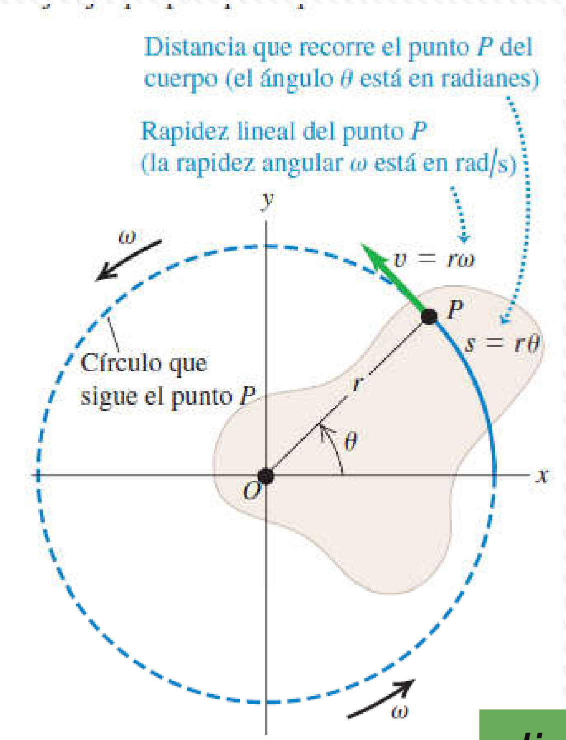
Punto *P a una distancia constante r de O, describe círculo de radio r.*

Ángulo θ (en radianes) y la longitud del arco s: $s = r.\theta$

Derivando con respecto al tiempo (*r es constante)* y tomando el valor absoluto:

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido



$|ds/dt|$ *valor absoluto de la tasa de cambio de la longitud de arco,* igual a la ***rapidez lineal instantánea v de la partícula***.

$|d\theta/dt|$ valor absoluto de la razón de cambio del ángulo, **rapidez angular instantánea ω** (magnitud velocidad angular instantánea en rad/s)

$$v = r\,\omega$$

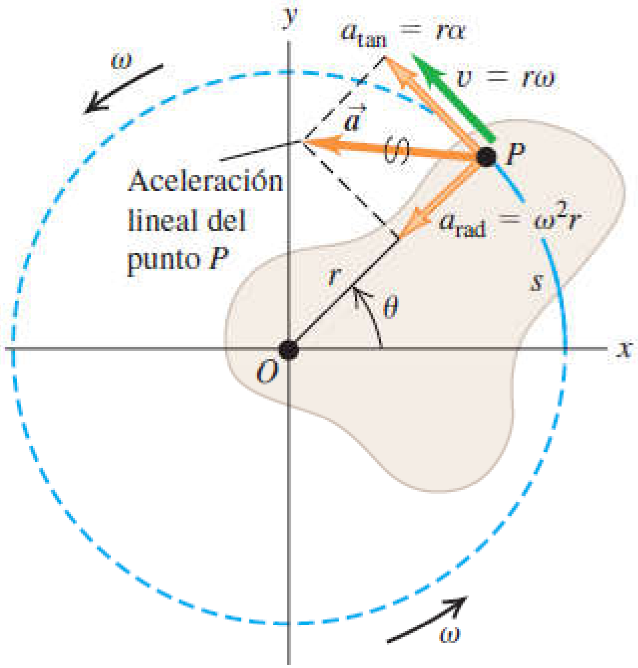
dirección del *vector v: tangente a la trayectoria circular en todos los puntos*

Cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez *angular, pero no todo punto tiene la misma rapidez tangencial* *porque r no es el* mismo para todos los puntos sobre el objeto.

Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Componentes de aceleración radial y tangencial:

- $a_{rad} = \omega^2 r$ es la aceleración centrípeta del punto P.
- $a_{tan} = r\alpha$ significa que la rotación de P está aumentando (el cuerpo tiene aceleración angular).



Derivando respecto al tiempo: $v = r\,\omega$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\,\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha_z$$

Se vio que un punto que se mueve en una trayectoria circular tiene una **aceleración radial a_r** ***dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud*** **es la de la aceleración centrípeta v^2/r** .

Como v = r ω, la aceleración centrípeta en dicho punto se puede expresar en términos de rapidez angular

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$$

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(r\alpha_z)^2 + (r\,\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha_z^2 + \omega^4}$$

PREGUNTAS RÁPIDAS

Nadia y Teo viajan en una calesita. Nadia viaja en un caballo en el borde exterior de la plataforma circular, al doble de distancia del centro de la plataforma circular que Teo, quien viaja en un caballo interior.

i) **Cuando la calesita en rotación** a una rapidez angular constante, ¿cuál es la rapidez angular de Nadia?

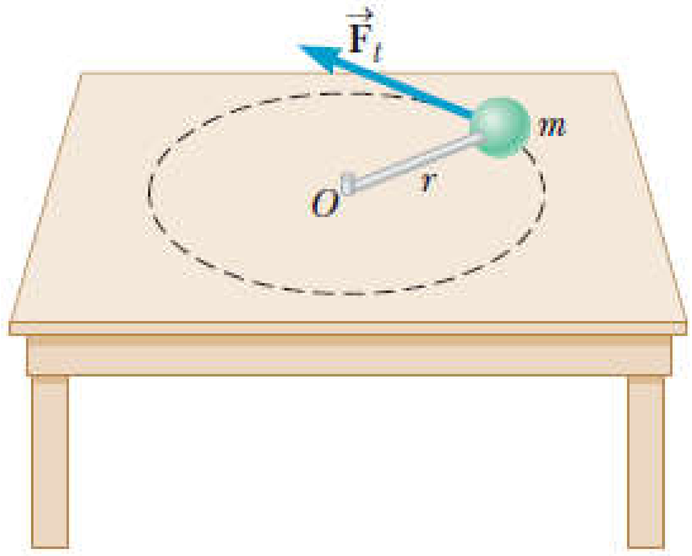
a) el doble de la de Teo,
b) la misma que la de Teo,
c) la mitad de la de Teo,
d) imposible de determinar.

ii) **Cuando el carrusel en rotación con una rapidez angular constante,** describa la rapidez tangencial de Nadia con la misma lista de opciones.

a) el doble de la de Teo,
b) la misma que la de Teo,
c) la mitad de la de Teo,
d) imposible de determinar.

Relación entre el torque y la aceleración angular

Veremos que cuando un rígido está sujeto a un torque neto, experimenta una aceleración angular proporcional al mismo, resultado similar a la 2da. ley de Newton, pero para rotaciones.



Sistema de la figura: objeto de masa *m unido a una barra muy* ligera de longitud *r, que gira alrededor del punto O sobre* una mesa *horizontal sin fricción. Supongamos que una fuerza F_t actúa perpendicularmente* a la barra (tangente a la trayectoria circular del objeto).

Debido a que no hay fuerza opuesta a la fuerza tangencial, el objeto experimenta una aceleración tangencial a_t *de acuerdo con la segunda ley del Newton:* $m.a_t = F_t$

Muliplicando ambos miembros por r: $m.a_t.r = F_t.r$

Y ahora, sustituyendo: $a_t = \alpha.r$ *resulta:* $m.\alpha.r^2 = F_t.r$

Pero el 2do. miembro es el torque que actúa sobre el objeto en relación con su eje de rotación, así que se puede rescribir como $m.\alpha.r^2 = \tau$

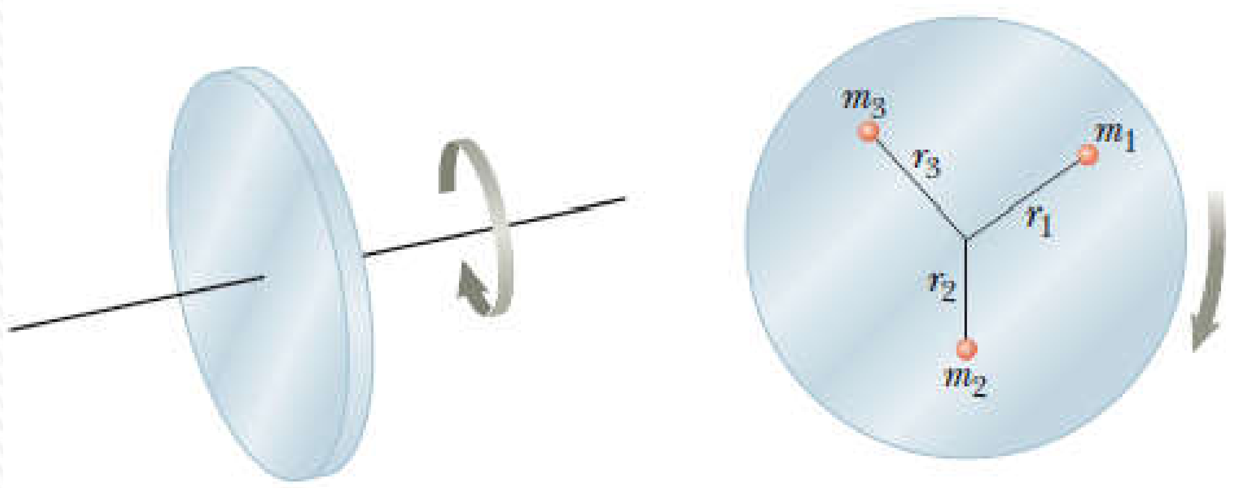
Relación entre el torque y la aceleración angular

$m.r^2\ \alpha = \tau$

$I.\alpha = \tau$

El torque (τ) sobre el objeto es proporcional a la aceleración angular (α) de éste, donde la constante de proporcionalidad *mr^2 se conoce como el* ***momento de inercia (I)*** del objeto de masa *m con respecto al punto O.*

(Como la barra es muy ligera, su momento de inercia puede despreciarse).



Sea un disco sólido que rota sobre su eje como en la figura.

El disco consiste en muchas partículas a varias distancias del eje de la rotación.

El torque en cada una de estas partículas está dado por la ecuación anterior.

El torque *neto sobre* el disco está dado por la suma de los torques individuales τ_i en todas las partículas, y etiquetando a c/u de las masas y a sus distancias con respecto al eje con un subíndice *i* :

$$\sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i . r_i^2\right)\alpha$$

Como el disco es rígido, todas sus partículas tienen la *misma aceleración angular,* así que a no está involucrada en la suma.

Relación entre el torque y la aceleración angular

$$\sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

Esta cantidad es el **momento de inercia, *I*,** *de todo el cuerpo respecto al eje que pasa por O.:*

El momento de inercia tiene unidades SI de kg.m^2.
Utilizando este resultado en la ecuación anterior, vemos que el torque neto sobre un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo está dado por:

$$\sum \tau = I\alpha$$

La expresión indica que **la aceleración angular de un objeto rígido es proporcional al torque neto que actúa sobre él,** y es el análogo rotatorio de la 2da. Ley de Newton.

En esta ecuación el torque sustituyendo a la fuerza, el momento de inercia que sustituye a la masa y la aceleración angular, a la aceleración lineal.

Aunque el momento de inercia de un objeto se relaciona con su masa, hay una importante diferencia entre ellos.
La masa *m depende solamente de la cantidad de materia en un objeto, mientras* que el momento de la inercia, *I, depende de la cantidad de materia y de su distribución* (con el término r^2 *en* $I = \Sigma mr^2$*) en el objeto rígido.*

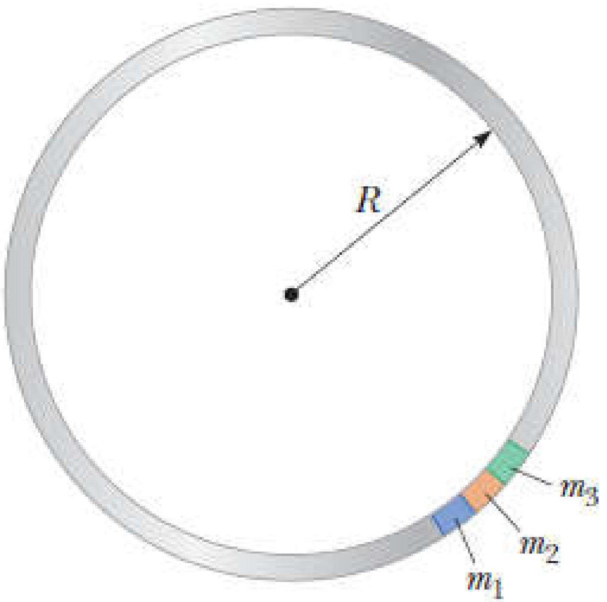
Momento de inercia

Como vimos una partícula tiene un momento de inercia igual a *mr^2 en relación con un cierto eje.*

El momento de inercia de un objeto compuesto sobre un cierto eje es justo la suma de los momentos de inercia de los componentes del objeto

$$I = \sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

La masa es una característica intrínseca del objeto y que no cambia, mientras que el **momento de inercia de un sistema depende de cómo la masa se distribuye y de la ubicación del eje respecto al cual se calcula I .**



Cuando el objeto es continuo, como una esfera o un cilindro se requieren a menudo técnicas del cálculo, a menos que una cierta simetría esté presente.
Un objeto de solución simple es un aro que rota sobre un eje perpendicular a su plano y que pasa a través de su centro (como la rueda de una bicicleta). Para evaluar el momento de inercia del aro, podemos todavía utilizar la ecuación $I = \Sigma mr^2$ *e imaginarse que la masa del aro M está dividida en n pequeños segmentos de masas m_1, m_2, m_3,… m_n, como se ve en la figura, con M= $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots m_n$.*

Momento de inercia

Podemos expresar *I como la suma:* $$I = \sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots + m_n r_n^2$$

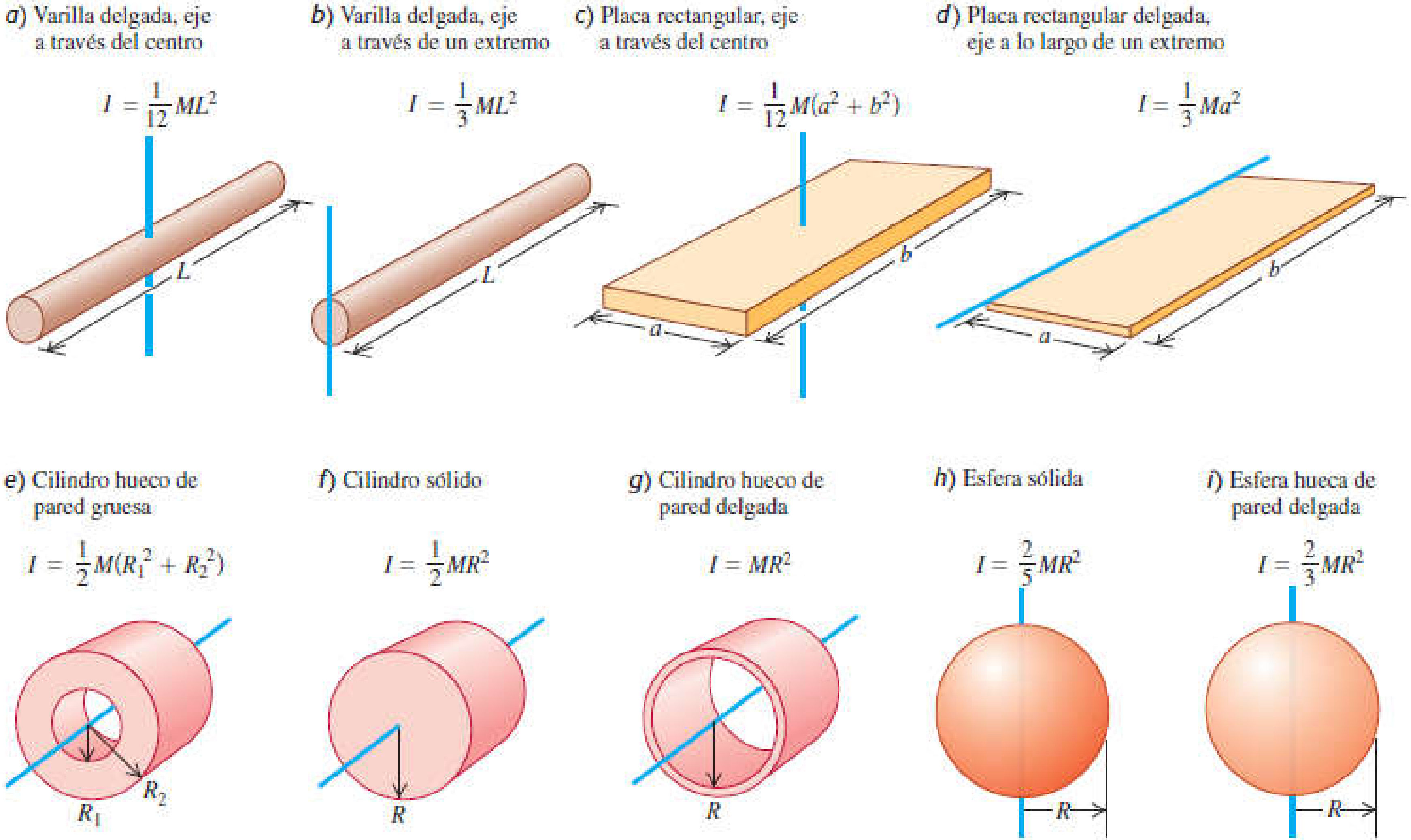
Todos los segmentos alrededor del aro están a la *misma distancia R del eje de rotación, así* que podemos usar subíndices en las distancias y factorizar R_2 *para obtener*

$$I = (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n)R^2 = MR^2$$

Expresión que se puede usar para el momento de inercia de cualquier objeto de forma anular, que rota sobre un eje a través de su centro y perpendicular a su plano. Este resultado es estrictamente válido solamente si el grueso del anillo es pequeño en relación con su radio interno.
Desafortunadamente, para objetos más extensos el cálculo es más difícil porque no todos los elementos demasa están situados a la misma distancia del eje, por lo que se requieren los métodos del cálculo integral.

Los momentos de inercia para algunas otras formas comunes se muestran en la próxima diapositiva.
Se puede utilizar esta tabla cuando necesite determinar el momento de inercia de un cuerpo que tiene las formas mencionadas

Momentos de inercia de diversos cuerpos homogéneos

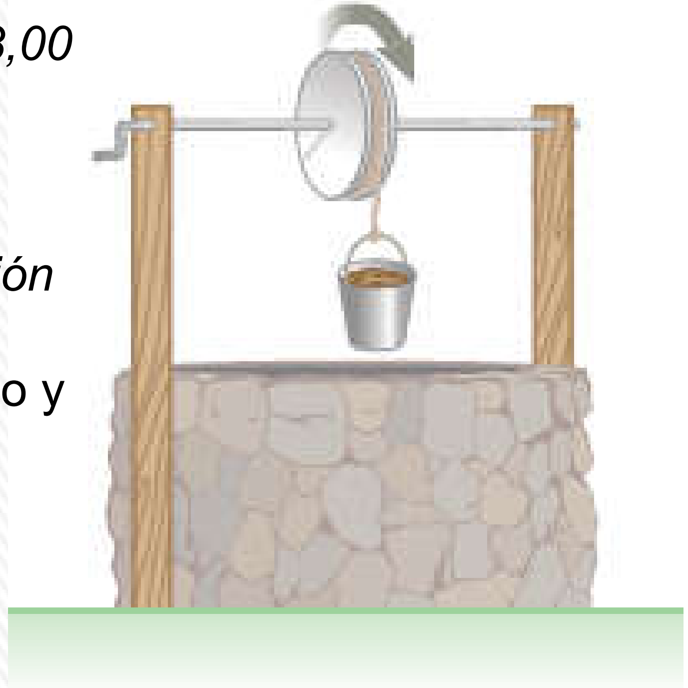


Ejemplo: Descenso de un balde en un pozo

Un carrete sólido cilíndrico sin fricción, de masa *M=3,00 kg y radio R=0,400 m, se usa para* sacar agua de un pozo. Un balde de masa *m*= 2,00 kg se ata a una cuerda ideal que se enrolla alrededor del cilindro.

a) Encuentre la tensión *T en la cuerda y la aceleración a del balde.*

b) Si el balde parte del reposo desde la boca del pozo y cae durante 3,00 s antes de golpear el agua, ¿qué distancia recorre en la caída?



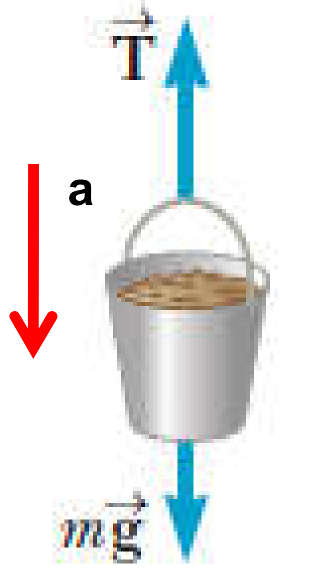
Este problema involucra tres incógnitas: la aceleración *a del balde, la aceleración* angular α *del cilindro y la tensión T en la cuerda, por lo que debemos establer tres ecuaciones:*

1) la segunda ley de Newton aplicada al balde, $ma = \Sigma F$;
2) *la versión rotatoria* de la segunda ley aplicada al cilindro: $I\alpha = \Sigma\tau$, *y*
3) *la* relación entre las aceleraciones lineal y angular, $a = r\alpha$, que conecta las dinámicas del balde y del cilindro.

El inciso b) es una revisión de cinemática.

Comencemos realizando los DCL del balde y del carrete

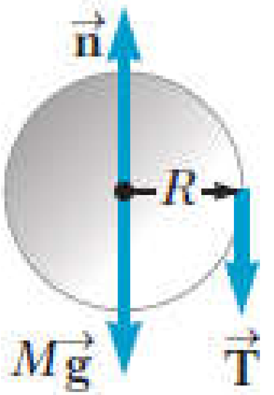
Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe



Como el balde está cayendo, la aceleración a es hacia abajo.

Entonces voy a escribir la 2da. Ley de Newton, según el eje vertical, y considerando en sentido positivo hacia abajo:

m.a= m.g – T (1)



El carrete se encuentra en equilibrio de traslación: la fuerza n equilibra la otras dos fuerzas actuantes: su peso Mg y la tensión T que le ejerce el balde a través de la cuerda.
Por tanto el carrete sólo puede rotar. Por lo que aplicamos *la versión rotatoria* de la segunda ley aplicada al cilindro: $I\alpha = \Sigma\tau$
En este caso, la única fuerza que realiza torque, es la tensión T con un brazo de palanca igual a R:

$$I\alpha = T.R$$

Ahora sustituimos: α=a/R y el valor de I correspondiente a un cilindro macizo ($MR^2/2$)

$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{a}{R} = T.R \qquad \frac{1}{2}Ma = T \quad (2)$$

Sustituyen T en (1) y operando:

$$ma = mg - \frac{1}{2}Ma \qquad \left(m + \frac{1}{2}M\right)a = mg \qquad a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M}g$$

Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe

$$a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M} g = \frac{2,00}{2,00 + \frac{1}{2}(3,00)} 9,80 = 5,60\ m/s^2$$

$$T = \frac{1}{2} Ma = \frac{1}{2}(3,00)(5,60) = 8,40\ N$$

b) Para determinar el desplazamiento del balde al cabo de 3,00 segundos de caída, aplico la expresión del desplazamiento para una aceleración constante; teniendo en cuenta que la velocidad inicial es nula.

$$\Delta y = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 = \tfrac{1}{2}(5.60\ \mathrm{m/s^2})(3.00\ \mathrm{s})^2 = 25,2\ \mathrm{m}$$