Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2022

Práctico 7: Técnicas de integración

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas utilizando integración por partes

a) $\int \theta \cos\theta \, d\theta$,

b) $\int \cos^2\theta \, d\theta$,

c) $\int x e^x \, dx$,

d) $\int x^2 e^x \, dx$,

e) $\int z^3 e^z \, dz$,

f) $\int \ln x \, dx$,

g) $\int x \ln x \, dx$,

h) $\int (\ln x)^2 \, dx$,

i) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

2. Calcular las siguientes integrales indefinidas utilizando integración por sustitución.

a) $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$,

b) $\int \tan\theta \, d\theta$,

c) $\int \frac{x}{e^{x^2+1}} \, dx$,

d) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$,

e) $\int \frac{2+x}{4x+x^2} \, dz$,

f) $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$,

g) $\int x \ln x \, dx$,

h) $\int x\sqrt{1-x^2} \, du$,

i) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

3. Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta \cos\theta \, d\theta$,

b) $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx$

c) $\int_{-1}^{1} x e^x \, dx$,

d) $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$,

f) $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$,

g) $\int_1^2 x \ln x \, dx$,

h) $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2} \, du$,

i) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

4. Consideremos la función $\sec\theta := 1/\cos\theta$.

a) Probar que $(\sec\theta)' = \sec\theta\tan\theta$.

b) Probar la igualdad

$$\sec\theta = \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$$

(sugerencia: $1 = \frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$)

c) Calcular la integral indefinida $\int \sec\theta \, d\theta$ (sugerencia: sustitución $u = \sec\theta + \tan\theta$).

d) Verifique que el resultado de la parte c) proporciona efectivamente las primitivas de $\sec\theta$ (el resultado correcto para esa parte es $\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$).

5. Calcule las siguientes integrales utilizando una sustitución trigonométrica adecuada (ver lista de más abajo)

a) $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

c) $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$,

f) $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$,

g) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\,dx$.

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \operatorname{sen}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1-\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

6. Calcular las integrales en *a*) y *c*) del ejercicio anterior utilizando una sustitución de la forma $u = a^2 \pm x^2$ (observe también las integrales *d*) y *h*) del ejercicio 2).

7. Calcule las siguientes integrales utilizando la descomposición de fracciones racionales en términos de fracciones simples:

a) $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx$

b) $\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}\,dx$

c) $\int \frac{x^4+1}{x^5+4x^3}\,dx$,

d) $\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}\,dx$,

e) $\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)}$,

f) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)^2}$,

Ejercicios opcionales

8. Considere t como función de x haciendo $t = \tan(x/2)$, donde $-\pi < x < \pi$.

a) Demostrar las identidades

$$\cos(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \ \operatorname{sen}(x/2) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

(segerencia: represente $x/2$ como un ángulo en el círculo trigonométrico y sírvase de fórmulas trigonométricas conocidas)

b) Deduzca las identidades

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

c) Utilizando que si $t = f(x)$, entonces $x = f^{-1}(t)$ es la correspondiente función inversa de t, demuestre que

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

9. Como aplicación del ejercicio anterior calcule las integrales

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 + \cos x}\, dx.$$