Mecánica Clásica 2020 | Práctico 2

Ejercicio 2 Una bala de masa m es disparada hacia arriba con una velocidad inicial v_0, vertical. Asumiendo que la misma está sometida a su peso y a una fuerza viscosa de tipo $\vec{F} = -b v \vec{v}$ (osea, una fuerza viscosa que depende del cuadrado de la velocidad $F = -bv^2$) opuesta a la velocidad.

a)

Plantee la ecuación del movimiento e intégrela para hallar:

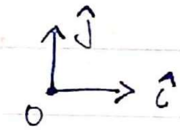
1) El tiempo que demora en detenerse

2) La altura máxima a la que llega.

b) ¿Cuál es la velocidad con la que vuelve a golpear el piso?

Solución a) Usando la segunda ley de Newton planteamos:

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a} = -bv\vec{v} - m\vec{g} \qquad \Big\{ \text{referencial}$$



La aceleración y la velocidad serán verticales dado que:

$$m\vec{a} = -bv^2\hat{j} - mg\hat{j} \Rightarrow \vec{a} \parallel \hat{j}$$

↑ este signo es negativo mientras $\vec{v} \cdot \hat{j} > 0$ es decir, mientras la velocidad sea hacia arriba.

Tomemos la primera parte del movimiento de la bala hasta el tiempo t_1, momento en el que la velocidad se anula.

Tomamos entonces : $a = \ddot{y}$ y $v = \dot{y}$, la ecuación de movimiento hasta el tiempo t_1 será :

$$\boxed{m\ddot{y} = -b\dot{y}^2 - mg}$$

1) Ahora simplificamos un poco haciendo el cambio:

$$\dot{y} = v \Rightarrow \ddot{y} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} \quad \text{y obtenemos} \quad m\frac{dv}{dt} = -bv^2 - mg$$

Operando para separar las variables:

$$-\frac{m\,dv}{mg + bv^2} = dt \Rightarrow t = -\int \frac{m\,dv}{mg + bv^2}$$

Si buscamos t_1, los límites de integración serán de v_0 a 0, entonces:

$$t_1 = -\int_{v_0}^{0} \frac{m\,dv}{mg + bv^2} = \int_0^{v_0} \frac{m\,dv}{mg + bv^2} = \frac{1}{g}\int_0^{v_0} \frac{dv}{1 + \frac{bv^2}{mg}} \quad (1)$$

Hacemos un cambio de variable: $\frac{bv^2}{mg} = w^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{b}{mg}}\,v = w$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{b}{mg}}\,dv = dw$$

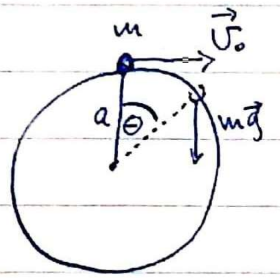
Remplazando en (1): $t_1 = \sqrt{\frac{m}{gb}}\int_0^{v_0} \frac{dw}{1 + w^2} = \sqrt{\frac{m}{gb}}\,\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{mg}}\,v\right)\Big|_0^{v_0}$

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{m}{gb}}\,\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{mg}}\,v_0\right)}$$

Ejercicio 4 En el exterior de una guía vertical de radio a, se mueve, apoyado sobre ella, un punto material P de masa m, que en un cierto instante se encuentra en el punto superior con velocidad v_0 (tangente a la guía).

Solución

a) Halle la ecuación de movimiento aplicando la ley de Newton.



La masa está apoyada por fuera sobre la guía. La guía ejercerá entonces una fuerza normal $\vec{N}$ dirigida hacia afuera desde el centro de la circunferencia.

La ecuación de movimiento, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan radialmente puede escribirse entonces:

$$-m a \dot{\theta}^2 = N - m g \cos\theta \quad (1)$$

Obsérvese que $a\dot{\theta}^2$ representa la aceleración centrípeta y $mg\cos\theta$ es la componente del peso según la dirección radial.

Para las componentes tangenciales de la aceleración tenemos:

$$m a \ddot{\theta} = m g \operatorname{sen}\theta \quad (2)$$

b) Tomamos la ecuación 2 y multiplicamos ambos miembros por $\dot{\theta}$ para después integrarla:

$$m a \ddot{\theta} \dot{\theta} = m g \operatorname{sen} \theta \dot{\theta}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{m} a \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right] = \cancel{m} g \operatorname{sen}\theta \dot{\theta}$$ // integrando $\ddot{\theta}\dot{\theta}$ y simplificamos $m \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$a \int_0^t \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right] dt = g \int_0^t \operatorname{sen}\theta \, \dot{\theta} \, dt$$

$$\Downarrow$$

$$a \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \Big|_0^t = -g \cos\theta \Big|_0^t$$

$$\Downarrow$$

$$a \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2\right) = -g\left(\cos\theta - \cos 0\right)$$ // en $t=0$ $\rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, $\rightarrow \theta = 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2a}\left(a^2\dot{\theta}^2 - a^2\dot{\theta}_0^2\right) = g\left(1 - \cos\theta\right)$$ // multiplicamos y div. el miembro izq. por a

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2a}\left(v^2 - v_0^2\right) = g\left(1 - \cos\theta\right)$$ // $a\dot{\theta} = v$

Finalmente, resolviendo para v tenemos:

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2ag\left(1 - \cos\theta\right)}}$$ $a = R$ radio de la guía.