Primer Parcial de Mecánica Clásica

Facultad de Ciencias

09 de Mayo de 2022

Ej. 1 Una partícula P de $1\,kg$ se mueve sobe el eje x positivo bajo la acción de una fuerza:

$$F(x) = \frac{36\,Nm^3}{x^3} - \frac{9\,Nm^2}{x^2} \qquad x > 0$$

a) Muestre que los movimientos posibles de P son: una oscilación periódica entre dos puntos extremos o un movimiento no acotado con un punto extremo, dependiendo del valor de la energía total.

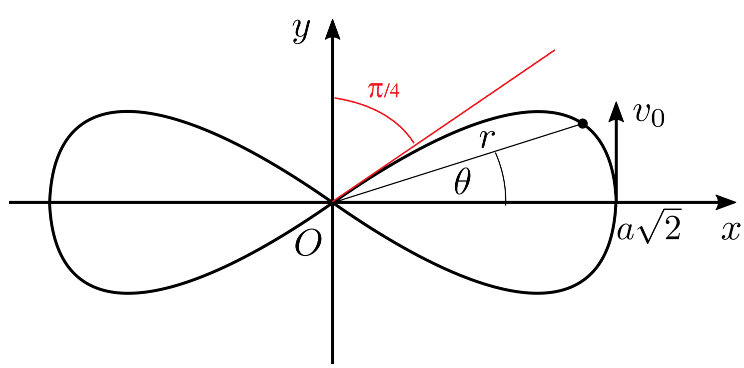
b) Si P es lanzada desde $x = 4\,m$ con velocidad $v = 0,5\,m/s$, verifique que el movimiento es periódico y determine el período.

Puede ser útil la integral:

$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = \frac{\pi(a+b)}{2}$$

Ej. 2 Una partícula de masa m se mueve bajo una fuerza central $\vec{F} = f(r)\hat{e}_r$ dirigida hacia un punto O, describiendo la curva indicada en la figura (una *lemniscata*) cuyas coordenadas polares (r, θ) verifican:

$$r^2(\theta) = 2a^2\cos(2\theta)$$



a) Halle la expresión de la fuerza en función de r (sugerencia: utilice la ecuación de Binet).

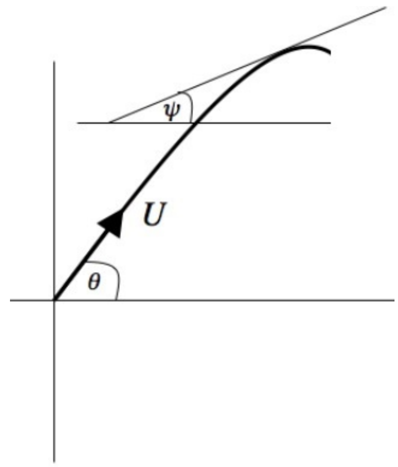
Si inicialmente la partícula está en el eje x con una velocidad v_0 según se indica:

b) Determine y bosqueje el potencial efectivo visto por la partícula indicando los puntos de retroceso.

c) Calcule el tiempo que le toma completar una órbita.
Sugerencia: Note que el tiempo que demora en ir desde la distancia máxima al origen es una cuarta parte del período.

Ej. 3 - **Movimiento proyectil en coordenadas intrínsecas**.

Considere una partícula que es disparada en un movimiento proyectil como se muestra en la figura. Si la partícula está sometida, además del peso, a una fuerza de resistencia del aire de la forma $\vec{F}_{res} = -kv^n\hat{v}$ con n un entero.



a) Deducir las ecuación de movimiento en coordenadas intrínsecas:

$$\ddot{s} = -\frac{k}{m}\dot{s}^n - g\,\mathrm{sen}(\psi)$$
$$\rho^{-1}\dot{s}^2 = g\cos(\psi),$$

donde ρ es el radio de curvatura.

b) Utilizando ψ para parametrizar la curva, muestre que estas se pueden combinar para escribir:

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{d\psi} = \tan(\psi) + \frac{k}{mg}v^n\sec(\psi) \qquad (1)$$

Sugerencia: Note que puede utilizar la regla de la cadena para convertir derivadas en t a derivadas en ψ.

c) Resuelva la ecuación anterior en ausencia de rozamiento ($k = 0$) y muestre que ésta implica

$$v\cos(\psi) = cte.$$

d) Pruebe que

$$\frac{dx}{d\psi} = -\frac{v^2}{g}$$

y muestre que la trayectoria es una parábola ($y = a + b\,x + c\,x^2$). *Sugerencia: Note que* $\frac{dy}{dx} = tan(\psi)$.

Pueden ser útiles las relaciones:

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$$
$$\int \tan(x)\,dx = -\log\big(\cos(x)\big)$$