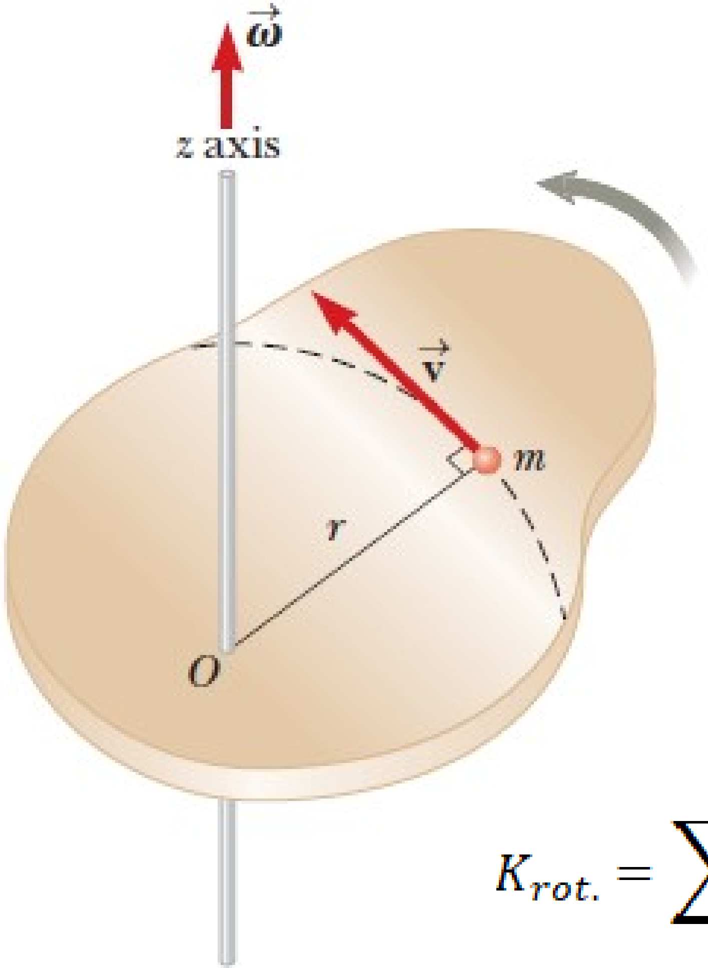
17- Trabajo, energía y potencia

- Trabajo y energía en rotaciones.
- Movimiento de rodar sin deslizar.
- Energía en rígidos que ruedan.
- El salto, la energía y leyes de escala.

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

Vimos que la energía cinética de una partícula de masa *m* que se movía a través del espacio con una rapidez *v dada valía:* $\frac{1}{2}mv^2$.

Veremos que ***un objeto que rota*** **con una rapidez angular ω sobre un cierto eje tiene una energía cinética de rotación dada por** $\frac{1}{2}I\omega^2$**.**



Consideremos un objeto en forma de una placa rígida delgada que rota alrededor de un cierto eje perpendicular a su plano y fijo.

La placa consiste en muchas partículas pequeñas, cada una de masa *m.*

Todas estas partículas rotan en trayectorias circulares alrededor del eje.

Si *r es la distancia de una de las partículas al* eje de rotación, la rapidez de esa partícula es *v=rω.*

Debido a que la energía cinética total de rotación de la placa es la suma de todas las energías cinéticas asociadas a sus partículas, tenemos

$$K_{rot.} = \sum\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum\left(\frac{1}{2}mr^2\omega^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum mr^2\right)\omega^2$$

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

$$K_{rot.} = \sum\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum\left(\frac{1}{2}mr^2\omega^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum mr^2\right)\omega^2$$

ω^2 se puede factorizar porque es la misma para cada partícula.
La cantidad entre paréntesis a la derecha es el momento de inercia de la placa en el límite, cuando las partículas llegan a ser muy pequeñas, así que:

$$K_{rot.} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Donde: $I = \sum mr^2$

es el momento de inercia de la placa respecto al eje de rotación.

En general, cuando tenemos un rígido que gira alrededor de un eje fijo, la energía cinética asociada a ese movimiento de rotación está dada por la expresión:

$$K_{rot.} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación y ω es la velocidad angular

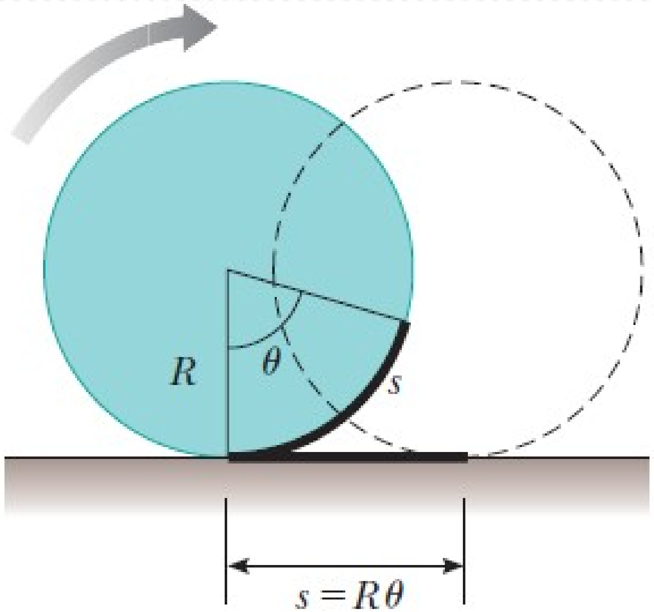
RODADURA (RODAR SIN DESLIZAR)

Es un caso de movimiento de un rígido en el que tiene traslación y rotación combinadas: **rodar sin resbalar (o rodar sin deslizar)**, como el movimiento de una rueda.

El cuerpo rodante (o rueda) es simétrico: su centro de masa (o de gravedad) está en su centro geométrico y consideramos **el movimiento en un marco de referencia inercial**, en el cual la superficie sobre la que la rueda se desplaza está en reposo.

El punto del cuerpo rodante que toca la superficie debe estar instantáneamente *en reposo para que no resbale.*

Si el radio de la rueda es *R y su rapidez angular alrededor del centro de masa es ω, la magnitud de la velocidad del centro de masas* es *Rω.*



$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Estas son las condiciones de rodar sin deslizar:

$v_{cm} = R.\omega$

$a_{cm} = R.\alpha$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO QUE RUEDA SIN DESLIZARSE

Para un cuerpo que rueda sin deslizar, se puede probar que su energía cinética total es igual a :

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

Donde ***M*** *es la* ***masa del cuerpo****,* ***v_{cm}*** *es la* ***rapidez*** **del centro de masa,** ***I_{cm}*** *es el* ***momento de inercia*** **con respecto al eje que pasa por el centro de masa**, y **ω** es la **rapidez angular**.

El primer sumando representa la **energía cinética de traslación**, mientras que el segundo representa la **energía cinética de rotación**.

Esta relación se cumple bajo las siguientes dos condiciones*:*

1. El eje que pasa por el centro de masa debe ser un eje de simetría.

2. El eje no debe cambiar de dirección.

TRABAJO Y ENERGÍA EN ROTACIONES

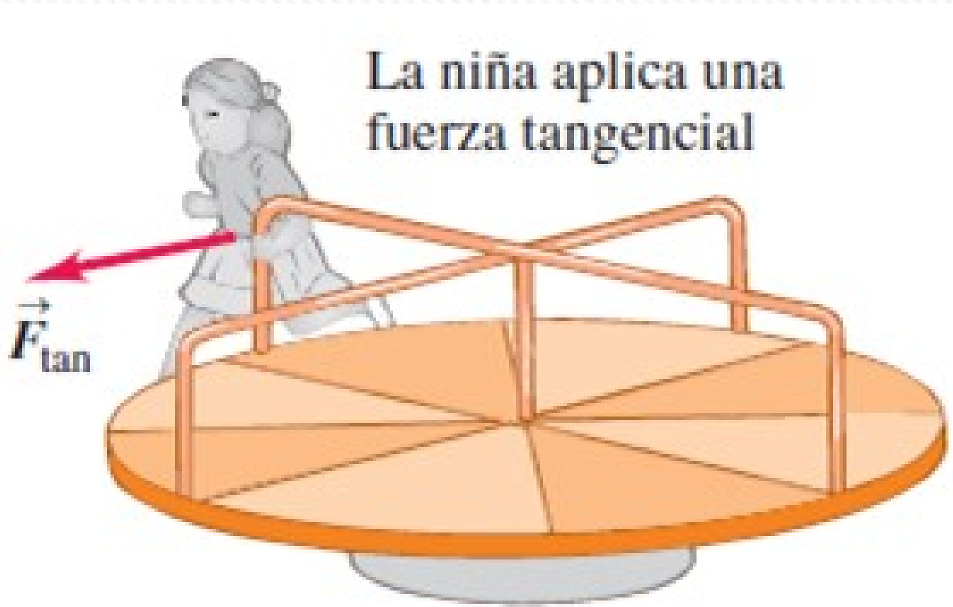
Un sistema como una bola de boliche rodando hacia abajo de una rampa está descrito por tres tipos de energía: la **energía potencial gravitacional Ug,** la **energía cinética de translación K_{tras}. y la energía cinética de rotación K_{rot}. Todas estas formas de energía, más** las energías potenciales de cualquier otra fuerza conservativa, deben incluirse en nuestra ecuación para la conservación de la energía mecánica de un sistema aislado.
Como no desplazamiento en el punto de contacto, en un cuerpo que rueda sin deslizar, la fuerza de fricción no realiza trabajo, por lo tanto si despreciamos otras fuerzas disipativas, la energía mecánica se conserva:

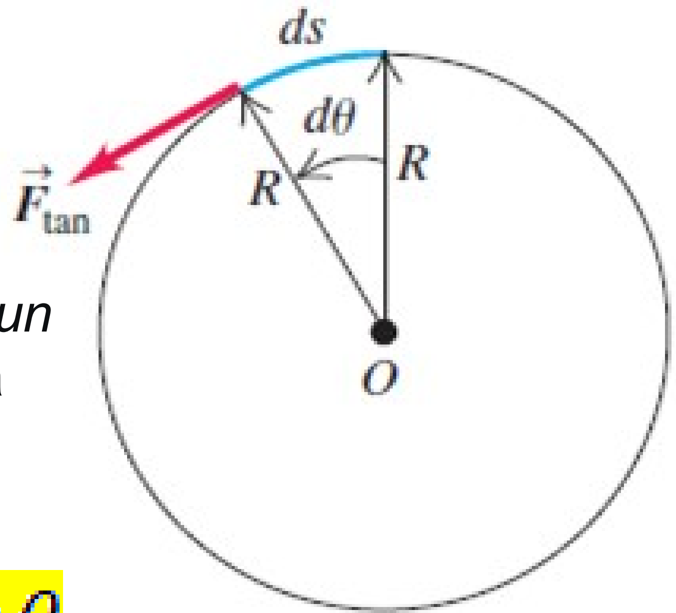
$$U_i + K_{tras.i} + K_{rot.i} = U_f + K_{tras.f} + K_{rot.f}$$

donde *i y f se reieren a los valores inicial y final, respectivamente, y U incluye las energías* potenciales de todas las fuerzas conservativas en un problema dado. Esta relación es cierta *sólo si omitimos las fuerzas disipativas que realizan trabajo.*

TRABAJO Y POTENCIA EN ROTACIONES

Consideremos una rueda de radio *r* *que gira alrededor* de un eje fijo que pasa por su centro.
Cuando describe un ángulo dθ, *cada* punto de su borde recorre una distancia **ds** = $r.d\theta$.
Una fuerza F_{tan} *que actúe tangencialmente sobre la rueda durante* este desplazamiento realizará un trabajo
$dW = F_{tan}.ds = F_{tan}.\ r.d\theta$
Como $F.r$ *es el* torque τ *debido a esa fuerza, el trabajo* realizado puede escribirse como: $dW = \tau.\,d\theta$





Trabajo total *W efectuado por el torque durante un desplazamiento angular de* θ_1 a θ_2 se obtendría integrando esta expresión entre θ_1 a θ_2.
Si el torque es *constante y el ángulo cambia en una cantidad finita* $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$:

$$W = \tau.\Delta\theta$$

TRABAJO Y POTENCIA EN ROTACIONES

Si la **fuerza** tuviera una **componente axial o radial** esta componente **no efectuaría trabajo**: pues el desplazamiento es tangencial.
Una componente de fuerza axial o radial **tampoco contribuiría al torque** alrededor del eje de rotación, por lo que **las ecuaciones son correctas para *cualquier fuerza, independientemente de sus componentes*.**

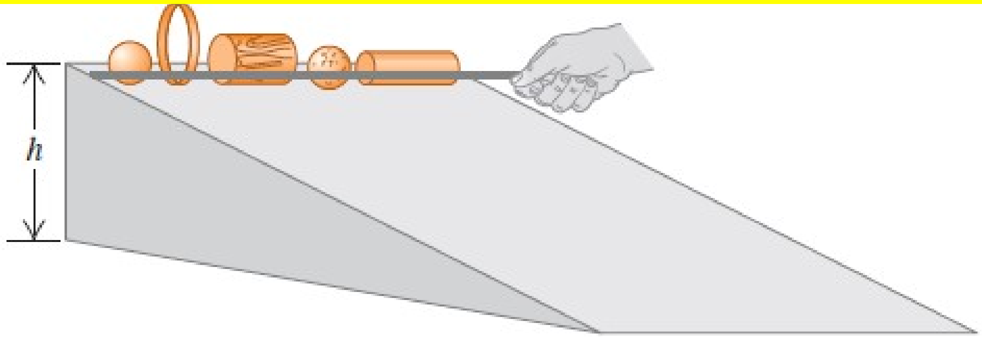
$$dW = \tau . d\theta$$

Dividiendo ambos miembros entre *dt (intervalo durante el que se da el desplazamiento angular), dW/dt es la rapidez con que se efectúa trabajo, o* ***potencia P****, y dθ/dt es velocidad* angular ω

$$P = \tau . \omega$$

Si un torque τ *(con respecto al eje de rotación) actúa sobre un cuerpo que gira con velocidad* angular ω*, su potencia (rapidez con que efectúa trabajo) es el producto de* τ y ω.
Análogo de la relación que desarrollamos para el movimiento de partículas: *P = F.v*

Ejemplo: carrera de cuerpos rodantes



En la demostración de una clase de física, un profesor "pone a competir" diversos cuerpos rígidos redondos, soltándolos del reposo desde arriba de un plano inclinado (ver figura). ¿Qué forma debe tener un cuerpo para ser el primero en llegar a la base?

Video: https://www.youtube.com/watch?v=8psVQHHUEcI&ab_channel=wesphysdemowesphysdemo

Consideraciones:

La **fricción cinética no efectúa trabajo si los cuerpos ruedan sin resbalar (no hay desplazamiento)**. Por lo tanto, podemos utilizar **conservación de la energía**.

Cada cuerpo parte del reposo desde arriba de una pendiente de altura *h, así que:*

$K_1 = 0$, $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$ *(considero U=0 en la base del plano)*

La energía cinética en la base del plano está dada por la ecuación

$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$

Como los cuerpos ruedan sin resbalar, $\omega = v_{cm}/R$.

Podemos expresar los momentos de inercia de los cuatro cuerpos redondos de la forma $I_{cm} = cMR^2$, *donde c es un número menor* que o igual a 1 que depende de la forma del cuerpo.

Nuestro objetivo es hallar el valor de *c que da al cuerpo la mayor rapidez* v_{cm} *después* de que su centro de masa ha descendido una distancia vertical *h.*

Ejemplo: carrera de cuerpos rodantes

Conservación de la energía mecánica: $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

$$Mgh = \tfrac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \tfrac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{\text{cm}}}{R}\right)^2$$

$$Mgh = \tfrac{1}{2}(1 + c)Mv_{\text{cm}}^2$$

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

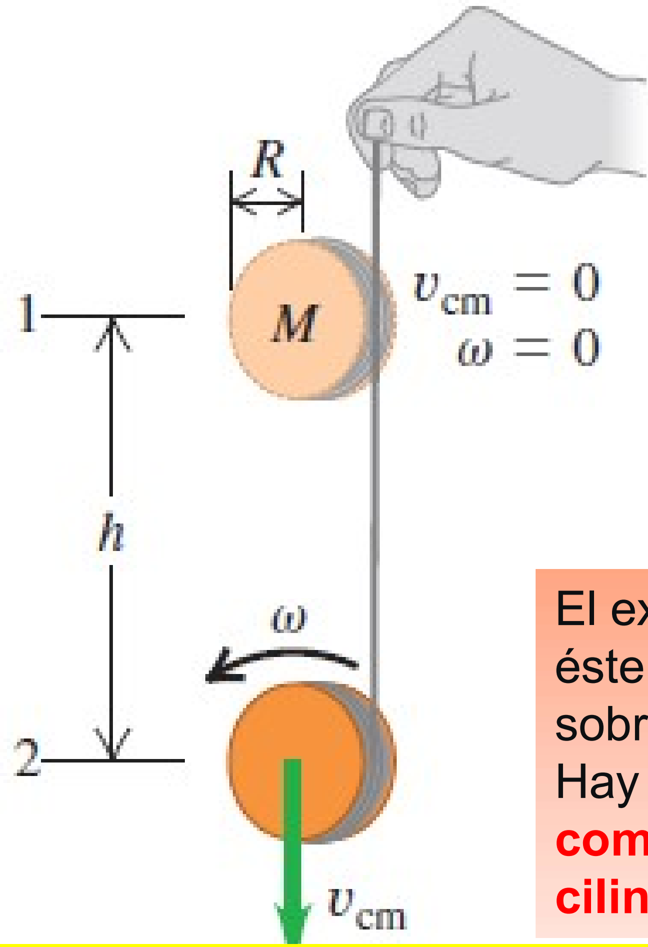
Para un valor dado de *c, la rapidez* ***v_{cm}* *una vez que se ha* descendido una distancia *h no depende de la masa M del cuerpo ni de* su radio *R*.**

Todos los cilindros sólidos uniformes tienen la misma rapidez abajo, sin importar sus masas y sus radios. Todos los valores de *c nos indican que el orden de llegada para los cuerpos uniformes* será el siguiente:

1. **cualquier esfera sólida (c= 2/5),**
2. **cualquier cilindro sólido (c=1/2)**,
3. **cualquier esfera hueca de pared delgada (c=2/3)**, y
4. **cualquier cilindro hueco de pared delgada (c=1) .**

Los cuerpos con *c pequeña siempre vencen a los cuerpos con c grande* porque menos de su energía cinética se dedica a la rotación y más a la traslación

Ejemplo: Rapidez de un yo-yo

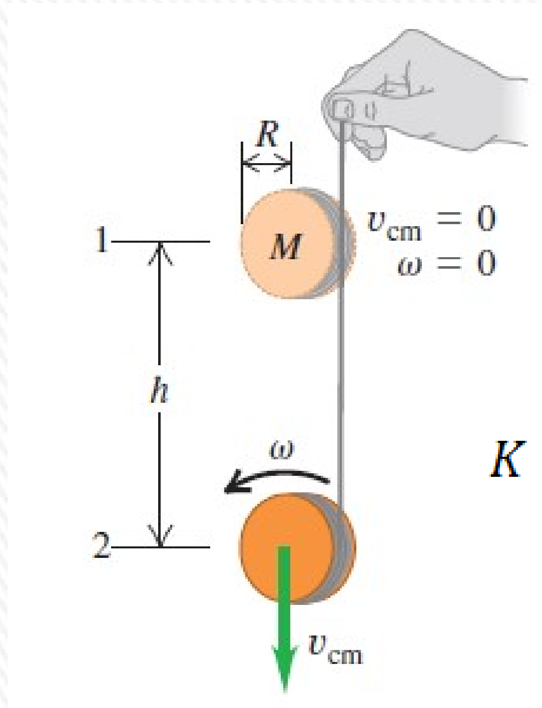


Se hace un yoyo enrollando una cuerda con masa despreciable varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa *M y radio R*.
Se sostiene el extremo de la cuerda fija mientras se suelta el cilindro desde el reposo.
La cuerda se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira.
Use consideraciones de energía para calcular la rapidez v_{cm} *del centro de masa del cilindro después de* caer una distancia *h.*

El extremo superior de la cuerda está fijo, no se tira de éste hacia arriba, así que su mano **no efectúa trabajo** sobre el sistema de la cuerda y el cilindro.
Hay **fricción entre la cuerda y el cilindro pero, como la cuerda no resbala sobre la superficie del cilindro**, no se pierde energía mecánica.

Por lo tanto, podemos usar la **conservación de la energía mecánica**.
La energía cinética inicial del cilindro es $K_1 = 0$, *y su energía cinética final* K_2 *está dada por la ecuación vista;* la cuerda no tiene energía cinética porque no tiene masa.
El momento de inercia es $I_{cm} = ½MR^2$ *y,* $\omega = v_{cm}/R$ *ya que la* cuerda no resbala.
Las energías potenciales son $U_1 = Mgh$ *y* $U_2 = 0$.

Ejemplo: Rapidez de un yo-yo



Conservación de la energía mecánica:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + U_1 = K_2 + 0$$

Energía cinética de un rígido:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \qquad v_{cm} = R\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{cm}}{R}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{2} \right) \left(\frac{v_{cm}}{R} \right)^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{4} M v_{cm}^2 = \frac{3}{4} M v_{cm}^2$$

$U_1 = Mgh$

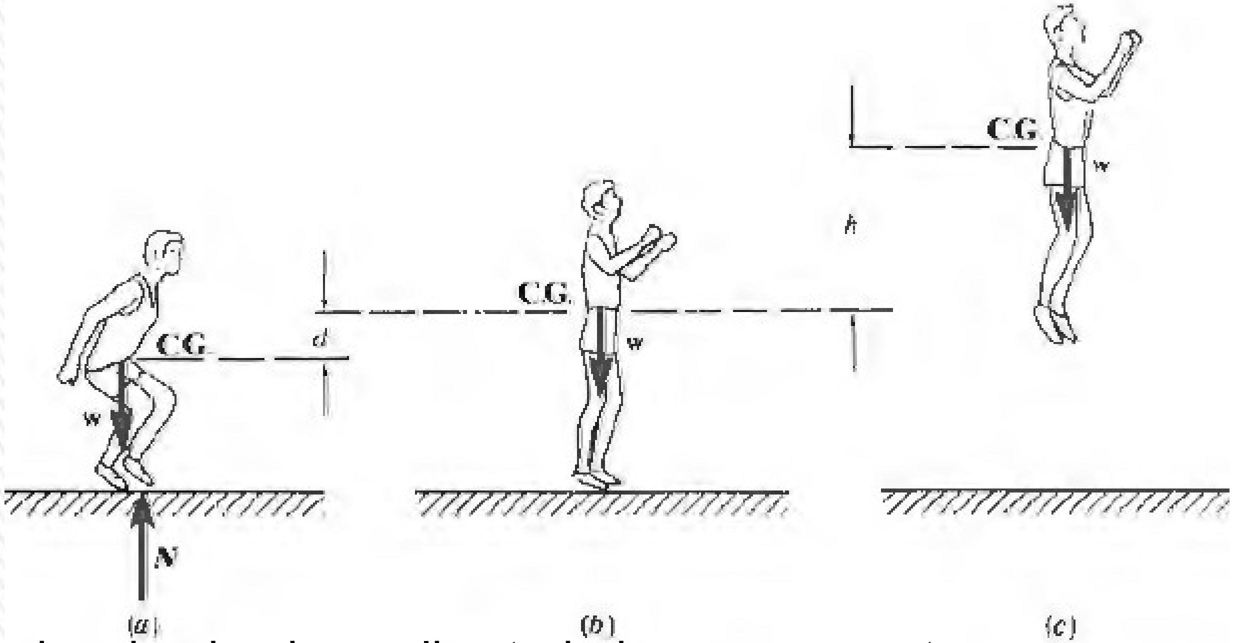
$$Mgh = \frac{3}{4} M v_{cm}^2$$

$$\boxed{v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} g h}}$$

EL SALTO, LA ENERGÍA Y LEYES DE ESCALAS

La figura muestra un hombre que salta. Inicialmente, se agacha bajando su centro de gravedad una distancia ***d denominada distancia de aceleración***.

Mediremos la energía potencial con respecto a este nivel de referencia.



A medida que se va acelerando e irguiendo, realiza trabajo para aumentar sus energías potencial y cinética. En el despegue su energía potencial es $U_0 = mgd$. *Si su velocidad ascendente* vale v_0, su energía cinética es $\frac{1}{2} mv^2$

Entonces al alcanzar la posición erguida de despegue, ha realizado un trabajo W

$$W = mgd + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Desde el despegue hasta la máxima altura del salto, la única fuerza que actúa sobre el hombre es su peso.

Por lo tanto, mientras está en el aire, su energía mecánica es constante.

En el punto más alto del salto, $K=0$ y $U = mg(h + d)$.

EL SALTO, LA ENERGÍA Y LEYES DE ESCALAS

Como a energía mecánica se conserva, se cumple:

$$W = mgd + \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(d+h)$$

En consecuencia, la energía total que el hombre debe proporcionar para el salto es *W= mg(h + d).*
En lo que sigue de este análisis despreciamos *d con respecto a h:* $W \cong mgh$

La aproximación no es muy buena para los seres huhumanos, ya que *d/h* ≈ ½ pero resulta adecuada paraanimales de menor tamaño.
A partir de la ecuación anterior podemos determinar la velocidad de despegue v_0

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

velocidad de despegue para alcanzar altura *h*.

Aplicaremos las *leyes de escala que expresan la capacidad* de salto en función del tamaño de un animal y que pueden compararse con los datos experimentales.
Consideraremos que la longitud característica vale L..
Recordemos que el volumen de un animal o de cualquiera de sus órganos es proporcional a L^3; la superficie del cuerpo y las áreas de las secciones transversales de los músculos son proporcionales a L^2 y la longitud de los miembros es proporcional a L.

EL SALTO, LA ENERGÍA Y LEYES DE ESCALAS

Al comparar la capacidad de salto de los animales observamos con sorpresa que las alturas de los saltos son bastante parecidas para animales que son muy diferentes en tamaño.
Así, la rata canguro, del tamaño de un conejo aproximadamente, salta casi tanto como un canguro grande.
Las langostas y las pulgas saltan aproximadamente a la misma altura.
Podemos preguntarnos a qué se debe este resultado.

Podemos plantear dos hipótesis:
1 La energía proporcionada por unidad de masa muscular es la misma para todos los animales.
2 La potencia proporcionada por unidad de masa muscular es la misma para todos los animales.

La primera hipótesis establece que un animal debería poder realizar una cantidad de trabajo proporcional a su masa, m.
Pero hemos visto que el trabajo W realizado durante un salto de altura h es mgh.
Pero mgh es proporcional a m, y como según esta hipótesis la energía proporcionada por unidad de masa es la misma para todos los animales, entonces h no depende de m y por tanto de L.

Esta predicción de que la altura alcanzada es independiente del tamaño del animal es aproximadamente correcta al ser comparada con los resultados experimentales.

EL SALTO, LA ENERGÍA Y LEYES DE ESCALAS

En cambio, las predicciones obtenidas a partir de la segunda hipótesis están en desacuerdo con los datos.
Por lo tanto, podemos deducir que ***la energía consumida· por unidad de masa es aproximadamente la misma para todos los animales de las mismas características generales.***

Como: $v_0 = \sqrt{2gh}$

Y ya que *h* no depende de *L,* otra conclusión que se obtiene es que la velocidad de despegue *es aproximadamente independiente* del tamaño.

La distancia de aceleración *d* es proporcional a la longitud característica *L,* de modo que el tiempo de despegue *t* $t = \frac{d}{v_{media}} = \frac{d}{v_0/2} = \frac{2d}{v_0}$

La potencia consumida por unidad de masa es la energía consumida por unidad de masa dividida por ese tiempo.
Como la energía consumida por unidad de masa es independiente de *L, la* ***potencia por unidad de masa*** *debe variar* como 1/L ó L^{-1}.

Esto predice que los animales más grandes consumirán su energía a una tasa más reducida.

EL SALTO, LA ENERGÍA Y LEYES DE ESCALAS

Por la hipótesis establecida, la energía desarrollada es proporcional a la masa, por tanto varía como L^3.
Por lo visto anteriornente, el tiempo de despeque era proporcional a L, entonces, como podemos interpretar la potencia como la energía proporcionada dividida el tiempo, tenemos que:

$$Potencia = \frac{Energía}{tiempo} = \frac{c_1 L^3}{c_2 L} = C L^2 \propto L^2$$

Es decir que la potencia desarrollada es proporcional a L^2.

La energía consumida por el cuerpo se convierte en último término en energía interna, que se debe eliminar por el cuerpo, la cual debe escapar a través de su superficie.
Por tanto la velocidad máxima de pérdida de energía varía como L^2. .
La velocidad metabólica máxima no puede ser mayor que la velocidad máxima de pérdida de energía, y por tanto debe variar como L^2.

La velocidad o tasa metabólica, es decir, la velocidad de utilización de energía por unidad de tiempo es proporcional a L^2.

EL SALTO, LA ENERGÍA Y LEYES DE ESCALAS

OBSERVACIÓN:

Las comparaciones del salto entre mamíferos e insectos se complican debido a la diferente manera en que utilizan los músculos de las piernas para el salto.
Los mamíferos utilizan directamente las contracciones musculares, pero los insectos utilizan un dispositivo de catapulta, como lo vimos anteriormente.
Por ejemplo, las pulgas tienen un material elástico denominado ***resilina*** en la articulación de las rodillas.
La pulga dobla gradualmente sus patas, estirando la resilina y la rodilla queda ftjada en una determinada posición. En el momento del salto, la rodilla se desbloquea y la resilina se contrae rápidamente y hace que las patas se estiren.
Así pues, los insectos emplean la energía potencial *elástica almacenada y utilizan sus* músculos de forma más bien indirecta.