Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico 6

1. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 9 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & -5 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Sabiendo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+5c & 3b & c \\ d+5f & 3e & f \\ 2g+10i & 6h & 2i \end{vmatrix}.$$

3. Sea A una matriz $n \times n$. Calcular en función de n y el determinante de A, los siguientes determinantes:

$$\det(2A), \quad \det(-A), \quad \det(A^2), \quad \det(A^t A).$$

4. Determinantes de matrices particulares.
   a) Probar que si n es impar y A es una matriz antisimétrica entonces $\det(A) = 0$.
   b) Una matriz cuadrada A se llama *nilpotente* si existe algún número natural k tal que $A^k = 0$. Mostrar que el determinante de cualquier matriz nilpotente es nulo.
   c) Una matriz cuadrada A se llama *idempotente* si verifica $A^2 = A$. ¿Qué valores puede tomar el determinante de una matriz idempotente? Construir un ejemplo para cada uno de esos valores.

5. Sea $A \in M_n$ definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular el determinante de A.

6. Se consideran las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Estudiar su invertibilidad.
   b) En los casos en que sean invertibles, calcular sus inversas.

7. Se consideran las siguientes matrices, en las que k, k_1, k_2 ,k_3 y k_4 indican constantes.

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

a) Discutir la invertibilidad de cada matriz según el valor de las constantes.

b) En los casos en que sean invertibles, calcular sus inversas.

8. En cada uno de los casos siguientes encontrar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz no es invertible.

$$\begin{pmatrix} a & -3 \\ 4 & 1-a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}.$$

9. Una *matriz de Vandermonde* es una matriz cuadrada $n \times n$ de la forma

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales arbitrarios.

a) Calcular $\det(V_2)$ y $\det(V_3)$.

b) Probar

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = (a_4 - a_3)(a_4 - a_2)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1).$$

Sugerencia: restarle a cada columna de V_4 su columna de la izquierda multiplicada por a_1.

c) Probar

$$\det(V_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

d) Probar que V_n es invertible si y solo si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son distintos entre sí.

10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de Cramer.

$$\begin{cases} -x + y - z &= -1 \\ 4x + 2y - z &= 5 \\ x + z &= 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ -3x + y + 5z &= 2 \\ -x + 5y + 3z &= 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - 3y + 4z &= 2 \\ 3x + 2y - 3z &= 1 \\ 7x - 4y + 5z &= 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x - 2y + z + t &= 2 \\ 3x + 2z - 2t &= -8 \\ 4y - z - t &= 1 \\ 5x + 3z - t &= -3 \end{cases}.$$

11. Utilizando el método de Cramer discutir (según λ) y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x - 3y &= -3 \\ 4x + (1-\lambda)y &= 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y + (\lambda - 5)z &= \lambda \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda x + y - \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 0 \\ x + y + \lambda z &= 0 \end{cases}.$$