Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2022

Práctico 9: Ecuaciones diferenciales

1. Sea $P = P(t)$ el número de individuos de una población hipotética en función del tiempo.

a) Sabiendo que la tasa de variación de la población es proporcional al número de individuos de ésta, con una constante de proporcionalidad $k = 1/2$, plantee una ecuación diferencial que refleje dicho crecimiento. Encuentre la solución que satisface la condición inicial $P(0) = 50$.

b) Ídem para una población como en el inciso a), pero sabiendo que desaparecen $m = 15$ individuos por unidad de tiempo; entonces la tasa de variación es proporcional a $P(t) - m/k$. Resuelva la ecuación diferencial correspondiente con la misma condición inicial que antes.

c) ¿Qué ocurre en las situación de los casos tratados en *a*) y *b*) si la constante de proporcionalidad satisface $k < 0$? (considere, por ejemplo, $k = -1/2$).

2. Una población hipotética se modela mediante la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = \frac{12}{10}P\left(1 - \frac{P}{4200}\right).$$

a) ¿Para qué valores de P la solución es creciente?

b) ¿Para qué valores de P la solución es decreciente?

c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio[1]?

d) Encuentre la solución que satisface la condición inicial $P(0) = 60$.

3. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2$,

b) $xy^2y' = x + 1$,

c) $y' = xe^{-y}$,

d) $(y^2x + y^2)y' = 1$.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables, con las correspondientes condiciones iniciales.

a) $dy/dx = x/y, y(0) = -3$.

b) $dy/dx = \ln x/xy, y(1) = 2$.

c) $y' = (xy \operatorname{sen} x)/(1 + y),\ y(0) = 1$

d) $x \ln x = y(1 + \sqrt{3 + y^2})y',\ y(1) = 1$.

[1] Una solución se dice que es de equilibrio cuando es una función constante.

5. La función $f(x)$ es solución de la ecuación diferencial $y' = y^4 - 6y^3 + 5y^2$.

a) Determine f en los casos en que sea una solución de equilibrio.

b) Si $1 < f(0) < 5$, demuestre que la función f es decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

c) ¿Qué se puede decir sobre $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ cuando f es como en el inciso b)?

d) Siguiendo la línea de los incisos b) y c), haga un análisis de $f(x)$ si $f(0) > 5$.

6. Resuelva los siguientes problemas:

a) Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 1)$ y cuya pendiente en (x, y) es xy.

b) Halle la función f tal que $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ y $f(0) = 1/2$.

c) Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de elípses de ecuaciones $x^2 + 2y^2 = k^2$, donde $k \neq 0$ (haga un dibujo de las elípses en los casos $k = 1, 2, 3$).

d) Ídem que en el inciso c) en el caso de las hipérbolas de ecuaciones $xy = k$, $k \neq 0$.