Actividad 4: Matrices.

Para esta actividad, vamos a considerar los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$S_1 \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \end{array} \right. \quad S_2 \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ x+y & = & 4 \end{array} \right. \quad S_3 \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ x-y & = & 4 \\ 3x+y & = & 0 \end{array} \right. \quad S_4 \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x-2y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$S_5 \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 1 \end{array} \right. \quad S_6 \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+y-z & = & 0 \\ 3x+y-z & = & 4 \end{array} \right. \quad S_7 \left\{ \begin{array}{rcl} 5x-y+2z & = & 4 \\ 15x-3y+6z & = & 12 \\ x+2y+2z & = & 2 \\ x+2y+z & = & 1 \end{array} \right. \quad S_8 \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+2y+z & = & 2 \\ 2z & = & 2 \end{array} \right.$$

1. En clase: espacios de matrices $n \times m$: presentación, suma y producto por un escalar.
2. Hallar la matriz A_i subyacente al sistema S_i para cada i.
3. Calcular $3A_2$, $A_2 + 5A_4 - A_5$.
4. En una cadena de panaderías se elaboran dos tipos de pan (pan de campo, pan integral), a partir de los siguientes ingredientes: levadura, harina y huevos.
   Para hacer 10 unidades de pan integral se utilizan: 2 unidades de levadura, 5 de harina y 3 de huevos. Para hacer 10 unidades de pan de campo se utilizan 1 unidad de levadura, 3 de harina y 4 de huevos. El costo de la materia prima varía según el barrio en que se encuentra la sucursal panadera. La unidad de levadura cuesta 3 pesos en el barrio de P_1, 5 pesos en el de P_2, 3 pesos en el de P_3 y 10 pesos en el de P_4. La de harina cuesta $10, 12, 15$ y 10 respectivamente. La unidad de huevos cuesta 15 pesos en P_1 y P_2 y 13 pesos en P_3 y P_4.
   a) Resumir la información anterior en 2 matrices: una que recoja los cantidades de materia prima por pan, y otra que recoja los precios por materia prima.
   b) Calcular cuánto cuesta hacer 10 panes de campo en la panadería P_3.
   c) ¿Cómo calculamos cuánto cuesta hacer 10 panes del mismo tipo en cada sucursal aprovechando la presentación matricial?
5. En clase: producto de matrices.
6. Calcular los productos posibles de las matrices subyacentes del ejercicio 2.
7. Interpretar el producto escalar como producto de matrices
8. Investigar sobre la conmutatividad, la asociatividad, la existencia de neutro y la distributividad respecto de la suma para el producto de matrices de tamaño $n \times m$ con $n, m \in \{2, 3\}$.
9. Interpretar cada sistemas de ecuaciones de arriba como una única ecuación matricial.
10. En clase: **invertibilidad de matrices. Relación con solución de sistemas: si A es una matriz (cuadrada) invertible, entonces $AX = b$ tiene solución única para cualquier vector b.**

11. Investigar si A_2, A_4, A_5, A_8 son invertibles, y en caso de que lo sean, especificar su inversa y resolver los sistemas correspondientes a partir de ella.

12. Consideremos la siguiente ecuación matricial, parametrizada en un vector columna b: $S_b : AX = b$, donde A es una matriz real de tamaño $n \times m$.

    a) Probar que S_0 es compatible.

    b) Probar que si S_b es compatible, hay una biyección entre las soluciones de S_b y las de S_0.

13. En clase: **Nociones de determinante en $2 \times 2, 3 \times 3$. Interpretación geométrica.**

14. Determinante de las matrices del ejercicio 11 y de sus eventuales inversas.

15. Comparar $det(A), det(A^t)$ y determinante de la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de A o dos columnas de A.

16. Probar que $det(AB) = detA.detB$ (para matrices 2×2 y 3×3).

17. Probar usando el ejercicio anterior, que si A es invertible, entonces $det(A) \neq 0$.

18. Se consideran la matriz A cuyas filas son u, v, w (vectores en $\mathbb{R}^3$) en ese orden y la matriz B cuyas columnas son $v \wedge w, -(u \wedge w), u \wedge v$) en ese orden. Probar que $AB = det(A)I_3$. Deducir que si $det(A) \neq 0$, entonces A es invertible.

19. En clase: interpretamos el hecho de que un conjunto $\{u, v, w\}$ sea li usando determinantes.

20. En clase: interpretamos el hecho de que el conjunto $\{u, v, w\}$ genere todo el espacio en términos de ecuaciones matriciales.

21. En clase: dedujimos que si $\{u, v, w\}$ es un conjunto li de $\mathbb{R}^3$, entonces dicho conjunto genera todo $\mathbb{R}^3$ (afirmación que había quedado pendiente de la Actividad 3).