MATRICES

Introducción

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo.

Los conceptos de matriz y todos los relacionados fueron desarrollados básicamente en el siglo XIX por matemáticos como los ingleses J.J. Sylvester y Arthur Cayley y el irlandés William Hamilton.

Las matrices se encuentran en aquellos ámbitos en los que se trabaja con datos regularmente ordenados y aparecen en situaciones propias de las Ciencias Sociales , Económicas y Biológicas.

Matrices. Definición y primeros ejemplos

Una *matriz* es una tabla rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas del modo:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Columnas de la matriz A}} \left.\begin{matrix} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{matrix}\right\} \text{Filas de la matriz A}$$

Abreviadamente se puede expresar $A = (a_{ij})$. Cada elemento de la matriz lleva dos subíndices. El primero de ellos "i", indica la fila en la que se encuentra el elemento, y el segundo, "j", la columna.

Así el elemento a_{23} está en la fila 2 y columna 3. Las matrices siempre se representarán con letras mayúsculas.

Ejemplos: Son ejemplos de matrices los siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A tiene 2 filas y 2 columnas, diremos que su tamaño es 2 x 2.¿Qué elemento es a_{21}?.

B tiene 2 filas y 3 columnas, diremos que su tamaño es 2 x 3.¿Qué elemento es b_{23}?.

C tiene 4 filas y 3 columnas, diremos que su tamaño es 4 x 3.¿Qué elemento es c_{42}?.

En general, si una matriz A tiene m filas y n columnas, diremos que su tamaño o dimensión es m x n (se lee "m por n"), siempre en primer lugar el nº de filas y en segundo lugar el de columnas.

Tipos de matrices

1. Se llama *matriz nula* a la que tiene todos los elementos cero.

   Por ejemplo,
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   es una matriz nula de tamaño 2x5.

2. Se llama *matriz fila* a la que sólo tiene una fila, es decir su dimensión es 1x n.

   Por ejemplo,
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$
   es una matriz fila de tamaño 1 x 4.

3. Se llama matriz columna a la que sólo consta de una columna, es decir su dimensión será m x 1, como por ejemplo:
   $$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}$$
   es una matriz columna de tamaño 3 x 1.

4. Una matriz es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es n x n. La matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ del primer ejemplo anterior es cuadrada de tamaño 2 x 2 o simplemente de orden 2.

   Otro ejemplo de matriz cuadrada es:
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$
   de orden 3.

   Dentro de las matrices cuadradas llamaremos *diagonal principal* a la formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$, siendo la matriz:
   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
   En la matriz D del ejemplo anterior, su diagonal principal estaría formada por 1, 5, 0.

   Se llama *traza de la matriz* a la suma de los elementos de la diagonal. Es decir, Traza (A)=$a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$, y en el caso de D, Traza (D)= 1+5+0 = 6.

   La *diagonal secundaria* es la formada por los elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n1}$.

   En la matriz D estaría formada por 3, 5, -3.

Una clase especial de matrices cuadradas son las *matrices triangulares*.

Una matriz es *triangular superior* si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos y *triangular inferior* si son nulos todos los elementos situados por encima de dicha diagonal.

Son ejemplos de estas matrices:

$$\underbrace{E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 16 & -78 \end{pmatrix}}_{\text{Triangular inferior}} \quad \underbrace{F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}}_{\text{Triangular superior}}$$

Si una matriz es a la vez triangular superior e inferior, sólo tiene elementos en la diagonal principal. Una matriz de este tipo se denomina *matriz diagonal*.

Un ejemplo de matriz diagonal sería:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último, si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal sólo unos, se denomina matriz unidad o identidad. Se suelen representar por I_n , donde n es el orden o tamaño de la matriz. Algunas matrices identidad son:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones de las matrices

Las matrices se utilizan en el contexto de las ciencias como elementos que sirven para clasificar valores numéricos atendiendo a dos criterios o variables.

Ejemplo: Un importador de globos los importa de dos colores, naranja (N) y fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que se venden al precio (en euros) indicado por la tabla siguiente:

	2 unid.	5 unid.	10 unid.
Color N	0'04	0'08	0'12
Color F	0'03	0'05	0'08

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Color N	Color F
2 unid.	700000	50000
5 unid.	600000	40000
10 unid.	500000	500000

Resumir la información anterior en 2 matrices A y B, de tamaño respectivo 2x3 y 3x2 que recojan las ventas en un año (A) y los precios (B).

Nos piden que organicemos la información anterior en dos matrices de tamaño concreto. Si nos fijamos en las tablas, es sencillo obtener las matrices:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2\text{ ud} & 5\text{ ud} & 10\text{ ud} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{N} \\ \text{F} \end{array} \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{N} & \text{F} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'04 & 0'03 \\ 0'08 & 0'05 \\ 0'12 & 0'08 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2\text{ ud} \\ 5\text{ ud} \\ 10\text{ ud} \end{array}$$

Estas matrices se denominan *matrices de información*, y simplemente recogen los datos numéricos del problema en cuestión.

Otras matrices son las llamadas *matrices de relación*, que indican si ciertos elementos están o no relacionados entre sí. En general, la existencia de relación se expresa con un 1 en la matriz y la ausencia de dicha relación de expresa con un 0.

Estas matrices se utilizan cuando queremos trasladar la información dada por un *grafo* y expresarla numéricamente.

Operaciones con matrices

Suma y diferencia

Dadas dos matrices A y B podemos realizar su suma o diferencia de acuerdo a la siguiente regla. Para sumar o restar dos matrices *del mismo tamaño*, se suman o restan los elementos que se encuentren en la misma posición, resultando otra matriz de igual tamaño.

Por ejemplo:

$$\underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} - \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

Si las matrices tienen diferente tamaño, no se pueden sumar o restar entre sí.

Propiedades de la suma (y diferencia) de matrices:

a) Conmutativa: A + B = B + A

b) Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C

c) Elemento neutro: La matriz nula del tamaño correspondiente.

d) Elemento opuesto de A: La matriz -A, que resulta de cambiar de signo a los elementos de A.

Ejemplo:

Si

$$A = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}} \implies -A = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}}$$

porque:

$$\underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}} + \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}} = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicios:

1. Las exportaciones, en millones de euros, de 3 países A, B, C a otros tres X, Y, Z, en los años 2000 y 2001 vienen dadas por las matrices:

$$A_{2000} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 6'7 & 0'5 \\ 14'5 & 10 & 1'2 \\ 20'9 & 3'2 & 2'3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_{2001} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 13'3 & 7 & 1 \\ 15'7 & 11'1 & 3'2 \\ 21 & 0'2 & 4'3 \end{pmatrix} \end{array}$$

   Calcula y expresa en forma de matriz el total de exportaciones para el conjunto de los dos años.

   ¿Cuántos millones ha exportado el país B al Z en total?

   Calcula el incremento de las exportaciones del año 2000 al 2001 con los datos del ejemplo anterior.

2. Calcula x, y, z en la suma:

$$\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcula a, b, c para que se cumpla la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 3-a & b & -2 \\ 4 & -c+1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a+b & 4 \\ 1-c & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Producto por un número real

Dada una matriz cualquiera A y un número real k, el producto k·A se realiza multiplicando todos los elementos de A por k, resultando otra matriz de igual tamaño. (Evidentemente la misma regla sirve para dividir una matriz por un número real).

Por ejemplo:

$$-5 \cdot \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} -10 & -5 & -15 \\ 20 & -10 & -5 \end{pmatrix}}$$

Propiedades:

a) Distributiva respecto de la suma de matrices: k·(A + B) = k·A + k·B

b) Distributiva respecto de la suma de números: (k + d)·A= k·A + d·A

c) Asociativa: k·(d·A)=(k·d)·A

d) Elemento neutro, el número 1: 1·A=A

Ejercicios:

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X que verifique la ecuación:

$$2 \cdot X - 4 \cdot A = B$$

2. Determina las matrices X y Y sabiendo que:

$$\begin{cases} 3X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ -X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Trasposición de matrices

Dada una matriz cualquiera A, se llama matriz traspuesta de A, y se representa por A^t a la matriz que resulta de intercambiar las filas y las columnas de A.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces la matriz traspuesta de A es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Evidentemente, si A es una matriz de tamaño m x n, su traspuesta A^t tendrá tamaño n x m, pues el número de columnas pasa a ser el de filas y viceversa.

Si la matriz A es cuadrada, su traspuesta tendrá el mismo tamaño.

Propiedades:

a) $(A^t)^t = A$, es decir, la traspuesta de la traspuesta es la matriz inicial.

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

c) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

En base a esta nueva operación, podemos definir otras dos clases de matrices, que son:

Matriz simétrica, que es aquella para la que se cumple que $A^t = A$, por ejemplo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

es simétrica (compruébalo).

En una matriz simétrica, los elementos son simétricos respecto a la diagonal principal.

Ejercicio: ¿Puede ser simétrica una matriz que no sea cuadrada?¿Por qué?.

Matriz antisimétrica, es aquella para la que se cumple que $A^t = -A$.

Por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

es antisimétrica (comprueba).

En una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son siempre nulos (¿por qué?), y los restantes son opuestos respecto a dicha diagonal.

Ejercicios:

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ calcula $3A^t - B^t$.

2. Obtener las matrices X e Y que verifiquen los sistemas:

$$a) \begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad b) \begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad c) \begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Producto de matrices

Hay que dejar claro ya desde el principio que no todas las matrices pueden multiplicarse. Dos matrices se pueden multiplicar cuando se cumple la siguiente condición:

"Para multiplicar dos matrices A y B, en este orden*, A·B , es condición indispensable que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B"*

Si no se cumple esta condición, el producto A·B no puede realizarse, de modo que esta es una condición que debemos comprobar previamente a la propia multiplicación.

Una vez comprobado que el producto A·B se puede realizar, si A es una matriz m x n y B es una matriz n x p (observemos que el nº de columnas de A = n = nº de filas de B), entonces **el producto A·B da como resultado una matriz C de tamaño n x p** del siguiente modo:

"El elemento que se encuentra en la fila i y la columna j de la matriz C=A·B, se obtiene multiplicando los elementos de la fila i de A por la columna j de B y sumando los resultados"

Veámoslo mediante un ejemplo:

Para multiplicar las matrices:

$$A = \underset{2x4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \qquad y \qquad B = \underset{4x3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

primero comprobamos que se puede realizar el producto A·B, pues el nº de columnas de A es 4 y el nº de filas de B también es 4, y el resultado, según lo dicho será una matriz de tamaño 2 x 3, tiene 2 filas y 3 columnas:

$$\underset{2x4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4x3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}}$$

Sólo nos falta completar los elementos de la matriz producto. Para ello, seguimos la regla anterior:

El elemento de la fila 1 y columna 1 de A·B proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A por la columna 1 de B y sumar, es decir:

$$(-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 0 + 2 + 2 + 12 = 16$$

El elemento de la fila 1 y columna 2 de A·B proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A y la columna 2 de B y sumar:

$$(-3) \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 12 - 4 + 0 + 8 = 16$$

El elemento de la fila 1 y columna 3 de A·B proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A y la columna 3 de B y sumar:

$$(-3) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = -3 + 2 + 2 + 4 = 5$$

Así sucesivamente se obtienen (comprueba):

$$\underset{2x3}{\begin{pmatrix} 16 & 16 & 5 \\ 5 & -22 & 11 \end{pmatrix}}$$

Ejercicios:

1. Para las matrices A y B anteriores, calcula B·A

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula si es posible A·B y B·A. ¿Coinciden?.

3. Lo mismo si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Calcula todos los productos posibles entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   Además, calcula A^2 y A^3.

5. Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   calcula:

$$A + B, 3A - 4B, A \cdot B, A \cdot D, B \cdot C, C \cdot D, A^t \cdot C, D^t \cdot A^t, B^t \cdot A, D^t \cdot D, D \cdot D^t$$

Propiedades del producto de matrices

a) Asociativa: A·(B·C) = (A·B)·C

b) Distributiva respecto de la suma:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

c) Elemento neutro, la matriz identidad correpondiente, si A es m x n:

$$A \cdot I_n = A$$

$$I_m \cdot A = A$$

d) En general *el producto de matrices no es conmutativo*

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Pueden verse ejemplos en los ejercicios anteriores. Esta es una propiedad muy importante.

e) El producto de dos matrices no nulas A y B puede dar lugar a una matriz nula:

$$\underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3x1}{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}} = \underset{2x1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Se dice que el conjunto de las matrices con la operación producto tiene *divisores de cero*, es decir, hay matrices no nulas cuyo producto es nulo.

Ejercicios:

1. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿son ciertas las propiedades siguientes, que son ciertas para las operaciones con números reales?:

   a) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$

   b) $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B$

   c) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

2. Determina los valores de a y b de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ para que $A^2 = A$.

3. ¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?.

La matriz inversa

Sabemos ya multiplicar matrices y hemos visto algunas de las propiedades de esta operación.

Recordemos, en primer lugar, que no siempre es posible efectúar la multiplicación de dos matrices, y en segundo lugar, que aunque sea posible hacer esta multiplicación, en general no es conmutativo, es decir A·B es distinto de B·A.

En el caso particular de que tratemos con *matrices cuadradas del mismo orden* A y B, es claro que podemos efectuar los productos A·B y B·A, que darán como resultado otra matriz del mismo orden, aunque, como ya se ha dicho, las matrices resultantes serán, en general, distintas.

Sabemos también que el elemento neutro del producto de matrices es la matriz identidad I_n.

Por analogía con el caso de los números reales, podemos plantearnos la siguiente cuestión:

Si tenemos un número real, por ejemplo el 2, podemos interesarnos en buscar el inverso del 2 para el producto, es decir un número real x tal que 2·x = 1, el producto de 2 por x sea igual al elemento neutro, el 1.

Evidentemente, en el caso de los números reales es bien fácil despejar x para obtener, en nuestro caso, que $x = \frac{1}{2}$, es decir, el inverso de un número real es otro número que multiplicado por él da el elemento neutro, el 1.

Todo número real, salvo el 0, tiene inverso.

Trasladando esto a las matrices, nos podemos plantear si dada una matriz cuadrada A de orden n, cualquiera, existe su inversa X para el producto de matrices,tal que

$$A \cdot X = I_n$$

es decir, el producto de A por su inversa produce el elemento neutro matricial, la matriz identidad I_n.

Sin embargo, hay algunas diferencias con respecto al caso de los números reales:

1) No podemos “despejar” la matriz X del modo $X = \frac{I_n}{A}$, porque no hemos definido la división de matrices.

2) No todas las matrices cuadradas no nulas tienen matriz “inversa” (sea lo que sea, por analogía con los números).

Definamos, en primer lugar, el término de matriz inversa:

Dada una matriz cuadrada de orden n , A, se dice que A *es invertible* (o que posee inversa o que es no singular o que es regular), si existe otra matriz del mismo orden, denominada matriz inversa de A y representada por A^{-1} y tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

y

$$A^{-1} \cdot A = I_n$$

Si A no tiene inversa, se dice que es *singular o no invertible.*

Si una matriz tiene inversa, dicha matriz inversa es única (sólo hay una). Para calcular dicha matriz inversa, podemos utilizar dos vías:

Método directo:

Consiste en determinar A^{-1} planteando un sistema de ecuaciones, es decir, si por ejemplo queremos determinar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, lo que estoy buscando es otra matriz de igual tamaño (orden 2) tal que $A \cdot A^{-1} = I_2$ y $A^{-1} \cdot A = I_2$, es decir, si $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, se tiene que cumplir que :

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ -x+z & -y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 0 \\ -x + z = 0 \\ -y + t = 1 \end{cases}$$

Es decir, hemos de resolver un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, aunque en realidad son 2 sistemas de dos ingónitas cada uno (uno con x y z y otro con y y t).

Resolviendo el sistema se obtiene que

$$x = \frac{1}{3}, y = \frac{-2}{3}, z = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{3}$$