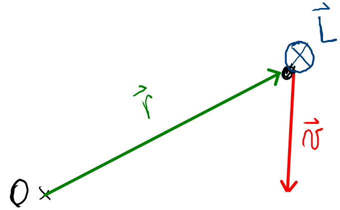
MOMENTO ANGULAR

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
- $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$= \vec{r} \cdot \vec{F} \operatorname{sen} \alpha$



$$\frac{dL}{dt} = \tau \quad \Big\| \quad \frac{dp}{dt} = F$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times \underbrace{\vec{p}}_{m\vec{v}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_N = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots\right) = \sum_i \vec{\tau}_i = \boxed{\vec{\tau}_N}$$

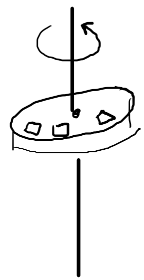
$\vec{v} \times m\vec{v} = 0 \quad (\vec{a} \times \vec{a} = 0)$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_N$$

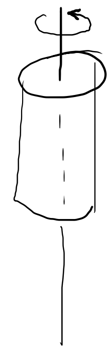
$$\frac{d\vec{p}_{sis}}{dt} = \vec{F}^{ext}_{neta} \rightarrow \frac{d\vec{L}_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{L}_i = \sum_i \vec{\tau}_{N_i} = \sum_i \vec{\tau}_{ext_i} = \vec{\tau}^{ext}_{NETO}$$

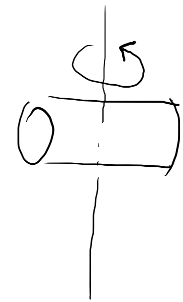
Por 3^a ley, solo me quedan torques ext

¿RÍGIDO?



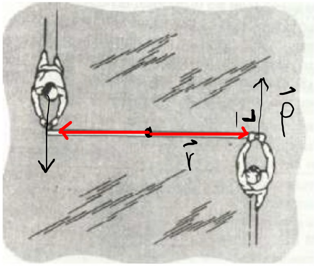
$$\boxed{L = I\omega}$$





¿CONSERVACIÓN de $\vec{L}$?

¡Si el τ^{ext}_{neto} es 0!



14.- Dos patinadores, cada uno de 51,2 kg de masa, se aproximan uno al otro a lo largo de trayectorias paralelas separadas por 2,92 m. Tienen velocidades iguales y opuestas de 1,38 m/s. El primer patinador lleva en sus manos una barra ligera de 2,92 m de longitud, y el segundo patinador toma el extremo de ésta al pasar; véase la figura. Suponga que el hielo carece de fricción.

a) Describa cuantitativamente el movimiento de los patinadores después que están unidos por la barra.

b) Ayudándose al jalar la barra, los patinadores reducen su separación a 0,940 m. Halle su velocidad angular entonces.

c) Calcule la energía cinética del sistema en las partes (*a*) y (*b*). ¿De dónde proviene el cambio?

MCU: $v = r\omega$

$\omega = \dfrac{v}{(l/2)}$

a • Los patinadores describen un MCU

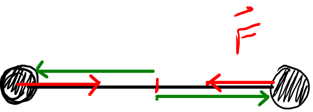
$$L_0 = \sum r_{i_0} m_i v_{i_0} \underbrace{\operatorname{sen}(90^\circ)}_{1} = \sum m_i r_{i_0} v_{i_0} = 2 m_{pa} \cdot \frac{l}{2} \cdot v_0 = 206 \ kg\,m^2/s$$

$r_{i_0} = \frac{l}{2}$

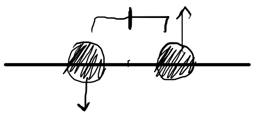
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$= I\omega = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega = \underbrace{2 \left(m_{pa} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)}_{I_0 = 218 \ kg\,m^2} \omega = 206 \ kg\,m^2/s \Rightarrow \omega = \frac{206 \ kg\,m^2/s}{218 \ kg\,m^2}$$

$$\boxed{\omega = 0{,}945 \ \frac{rad}{s}}$$



$¿\tau_F?$ $\tau_F = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \sim \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_N = 0 \Rightarrow L$ se conserva



$L = I\omega = I_0 \omega_0 = I_f \omega_f$

$$\boxed{\begin{cases} \omega_0 = 0{,}945\ \frac{rad}{s} \\ \omega_f = 9{,}11\ \frac{rad}{s} \end{cases}}$$

$I_0 = 218\ kg\,m^2$

$\omega_0 = 0{,}945\ rad/s$

$d_f = 0{,}940\,m$

$I_f = 2 \cdot m_{pa} \cdot \left(\frac{d_f}{2}\right)^2 \rightarrow 22{,}6\ kg\,m^2$

$I_0 = 2 \cdot m_{pa} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \cancel{2} \cancel{m_{pa}} \frac{\ell^2}{\cancel{4}} \omega_0 = \cancel{2} \cancel{m_{pa}} \frac{d_f^2}{\cancel{4}} \omega_f$

$\frac{\ell^2}{d_f^2} \omega_0 = \omega_f$

$\left(\frac{\ell}{d_f}\right)^2 \omega_0 = \omega_f = 9{,}11\ \frac{rad}{s}$

$¿ K_{rot} = \frac{I\omega^2}{2}$

$K_{rot_0} = \frac{I_0 \omega_0^2}{2} = 97{,}3\ J$

$K_f = \frac{I_f \omega_f^2}{2} = 938\ J$

$\Delta K = W_F$

15.- Un bloque pequeño de 0,0250 kg en una superficie horizontal sin fricción está atado a una cuerda de masa despreciable que pasa por un orificio en la superficie como se muestra en la figura. El bloque inicialmente está girando a una distancia de 0,300 m del orificio, con rapidez angular de 2,85 rad/s. Ahora se tira de la cuerda desde abajo, acortando el radio del círculo que describe el bloque a 0,150 m.

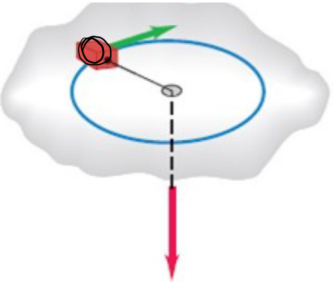
El bloque puede tratarse como partícula.

a) ¿Se conserva el momento angular del bloque? ¿Por qué?

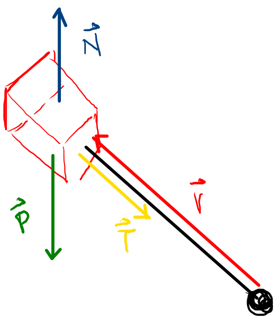
b) ¿Qué valor tiene ahora la rapidez angular?

c) Calcule el cambio de energía cinética del bloque.

d) ¿Cuánto trabajo se efectuó al tirar de la cuerda?



a



$\vec{\tau}_N = \vec{\tau}_T = \vec{r} \times \vec{T} = 0$ y como $\frac{dL}{dt} = \tau = 0 \Rightarrow L = cte$

b $L = \omega_0 I_0 = \omega_f I_f$

$\omega_0 \cancel{m} \cancel{R^2} = \omega_f \cancel{m} \frac{\cancel{R^2}}{4}$

$4\omega_0 = \omega_f = 11{,}4 \text{ rad/s}$

$\boxed{\begin{array}{l} \omega_0 = 2{,}85 \text{ rad/s} \\ \omega_f = 11{,}4 \text{ rad/s} \end{array}}$

$\omega_0 = 2{,}85 \text{ rad/s}$

$I_0 = mR^2 = 0{,}00225 \text{ kgm}^2 = 2{,}25 \times 10^{-3}$

$I_f = m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = 5{,}63 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega_0 = 2{,}85 \text{ rad/s} \\ \omega_f = 11{,}4 \text{ rad/s} \end{array}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(r\omega)^2}{2} = \frac{(mr^2)\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$\begin{cases} I_0 = 2{,}25 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2 \\ I_f = \dfrac{2{,}25 \times 10^{-3}}{4} \text{ Kgm}^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} K_0 = \dfrac{I_0 \omega_0^2}{2} = 9{,}14 \times 10^{-3} \text{ J} \\ \\ K_f = \dfrac{I_f \omega_f^2}{2} = 3{,}66 \times 10^{-2} \text{ J} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \Delta K = 0{,}0274 \text{ J}$$

$$= 2{,}74 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi \text{ rad}}$$

$$I \to \frac{I}{4}$$

$$\omega \to 4\omega$$

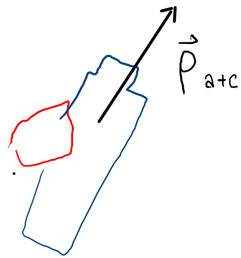
$$\omega^2 \to 16\omega^2$$

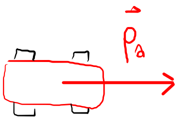
$$I\omega^2 \to \frac{I}{4} \cdot 16\omega^2 = 4I\omega^2$$

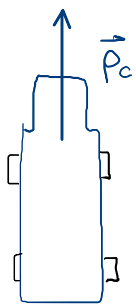
d $W_T = \Delta K = 2{,}74 \times 10^{-2}$ J

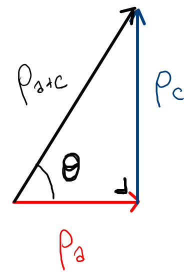
T.T.E.

10 - Un automóvil de 1200 Kg que viaja hacia el este, choca con un camión de 4500 Kg que viaja hacia el norte. La velocidad del automóvil era de 108 Km /h, y la del camión 72,0 Km /h.
a) Halle la velocidad de ambos vehículos (módulo y dirección) luego de chocar si después del impacto continúan moviéndose unidos.
b) Si el coeficiente de rozamiento entre el pavimento y las ruedas es 0,600, determine la distancia que recorren unidos.









$$\frac{km}{h} \xrightarrow[3,6]{\text{divido}} \frac{m}{s}$$

multiplico

$$v_{a_0} = 30,0\ m/s$$

$$v_{c_0} = 20,0\ m/s$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_a = (1200kg)\cdot(30,0\ m/s) = 3,60\times10^4\ kg\,m/s \\ p_c = (4500kg)\cdot(20,0\ m/s) = 9,00\times10^4\ kg\,m/s \end{cases}$$

$$p_{ac} = \sqrt{p_a^2 + p_c^2}$$

$$p_{ac} = 9,69\times10^4\ kg\,m/s$$

$$v_f = v_{af} = v_{cf} = \frac{p_{ac}}{m_a+m_c} = 17,0\ \frac{m}{s}$$

$$\tan\theta = \frac{p_c}{p_a} \rightsquigarrow \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{p_c}{p_a}\right) = 68,2^\circ$$

$K_f = 0$

$K_0 = \frac{v_f^2}{2}\cdot(m_a+m_c)$

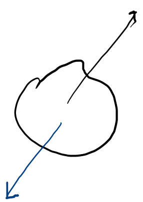
$W_{\vec F} = \vec F\cdot\vec{\Delta x}$

$$\Delta K = W_{f_{roz}} = -f_{roz}\cdot\Delta x = -\mu g \Delta x\,(m_a+m_c)$$

$$\Delta K = \underbrace{K_f}_{0} - K_0 \qquad W_{f_{roz}} = \vec f_{roz}\cdot\vec{\Delta x}$$

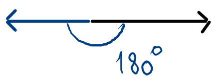
$$f_{roz} = \mu N = \mu\,(m_a+m_c)\,g$$

- Kane
- Serway ←
- Sears - Zemansky
  ↳ Young - Friedmann



$$\to +K_0 = +\frac{\cancel{(m_a+m_c)}}{2}\,v_f^2 = +\mu g \Delta x\,\cancel{(m_a+m_c)}$$

$$\frac{v_f^2}{2\mu g} = \Delta x = 24{,}6\ m$$



$\rightsquigarrow a = -\frac{f_{roz}}{M_T} \rightsquigarrow \Delta t$ en q' se detiene $\rightsquigarrow \Delta x = v_0 t + \frac{a t^2}{2}$

$\Delta v = a\,\Delta t$

$$\vec F\cdot\vec{\Delta x} = F\Delta x\cdot\overbrace{\cos 180^\circ}^{-1}$$