Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra lineal 1 (Física)
Primer semestre de 2018

Práctico 7

1. Investigar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio V, justificando la respuesta.

   a) $V=\mathbb{R}^2$, $W_1=\left\{(x,y):\ x^2=y^2\right\}$ y $W_2=\{(x,y):\ 2x=3y\}$.

   b) $V=\mathbb{R}^3$, $W_1=\{(x,y,z):\ x+y-z=0,\ 2x+3y=0\}$ y $W_2=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leq 0\right\}$.

   c) $V=\mathbb{R}^4$, $W_1=\{(w,x,y,z):\ w=x+y+z,\ w+y=0,\ x-y-3z=0\}$ y $W_2=\{(w,x,y,z):\ w+x+y-z=1\}$.

2. Investigar si cada uno de los siguientes subconjuntos de M_n es un subespacio.

   a) El conjunto de las matrices simétricas.

   b) El conjunto de las matrices antisimétricas.

   c) El conjunto de las matrices invertibles.

   d) El conjunto de las matrices de traza[1] nula.

3. Sea $\mathcal{F}$ el espacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En los casos siguientes determinar si W es un subespacio de $\mathcal{F}$.

   a) $W=\{f\in\mathcal{F}:\ f(5)=0\}$.

   b) $W=\{f\in\mathcal{F}:\ f(x^2)=f(x)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}\}$.

   c) $W=\{f\in\mathcal{F}:\ f \text{ es par}\}$[2].

   d) $W=\{f\in\mathcal{F}:\ f \text{ es impar}\}$.

   e) $W=\{f\in\mathcal{F}:\ f(1)=0 \text{ o } f(-1)=0\}$.

   f) $W=\{f\in\mathcal{F}:\ f(1)=f(0)\}$.

   g) $W=\{f\in\mathcal{F}:\ f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\}$.

   h) $W=\{f\in\mathcal{F}:\ f \text{ es derivable y } f(\pi)=f'(\pi)=0\}$.

   i) $W=\{f\in\mathcal{F}:\ f \text{ derivable de orden 2 y } f''+5f'+6f=0\}$.

4. En los casos siguientes investigar si v y w se pueden escribir como combinación lineal de vectores de $\mathcal{A}$.

   a) $\mathcal{A}=\left\{3x^3+x+1,\ -2x^2+x-1,\ 3x^3-2x^2+2x+1\right\}$, $v=3x^3-4x^2+3x-2$ y $w=6x^3-2x^2+4x+1$.

   b) $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}3&1\\-2&5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$, $v=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ y $w=\begin{pmatrix}3&-2\\-5&8\end{pmatrix}$.

5. Se considera el conjunto $\mathcal{A}=\left\{x^3+x+1,\ x^3+x^2,\ -2x^3+x+1,\ x^3+3x^2+x+1\right\}\subset\mathbb{R}[x]$.

   a) Probar que $\mathcal{A}$ es LD.

   b) Determinar los vectores de $\mathcal{A}$ que pueden ser expresados como combinación lineal de los restantes.

6. En los siguientes casos determinar si el conjunto $\mathcal{A}$ es linealmente independiente. Cuando no lo sea, se pide:

   - encontrar una combinación lineal no trivial de los vectores de $\mathcal{A}$ que dé el vector nulo;
   - encontrar un subconjunto de $\mathcal{A}$ que sea linealmente independiente y permita expresar a los restantes vectores de $\mathcal{A}$ como combinación lineal del subconjunto seleccionado.

   a) $\mathcal{A}=\{(1,1,1),\ (1,2,4),\ (1,3,9)\}\subset\mathbb{R}^3$.

   b) $\mathcal{A}=\{(1,2,2),\ (1,-3,2),\ (1,0,2)\}\subset\mathbb{R}^3$.

   c) $\mathcal{A}=\{(a,-a^2,1),\ (-1,1,a),\ (0,2a^2,a^2+1)\}\subset\mathbb{R}^3$. Discutir según $a\in\mathbb{R}$.

   d) $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}-1&4\\5&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&7\\8&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&1\\-1&5\end{pmatrix}\right\}\subset M_2$.

   e) $\mathcal{A}=\{x^2+1,\ x^2+x,\ x+2,\ x^2+3x\}\subset\mathbb{R}_2[x]$.

   f) $\mathcal{A}=\{4x+3,\ x^2-1,\ ax^2+4x+5\}\subset\mathbb{R}_2[x]$. Discutir según $a\in\mathbb{R}$.

   g) $\mathcal{A}=\{e^x,\ e^{-x}\}\subset\mathcal{F}$, siendo $\mathcal{F}$ el espacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

   h) $\mathcal{A}=\{e^x,\ \operatorname{senh}(x),\ \cosh(x)\}\subset\mathcal{F}$, siendo $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$ las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico, respectivamente y $\mathcal{F}$ el espacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

---

[1] La *traza* de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de la diagonal principal.

[2] Recordar que una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es *par* o *impar* si verifica $f(-x)=f(x)$ o $f(-x)=-f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$, respectivamente.