Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Matemática Discreta
Año 2021

Práctico 7: Grafos, generalidades

1. Se considera el conjunto $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y el subconjunto E dado por $\{x, y\} \in E$ si y sólo si $x - y$ es un entero par no nulo. Representarlo.

2. *a*) Contar la cantidad de aristas de K_n y de $K_{n,m}$.

   b) El grafo C_n se define como (V, E) donde $V = \{1, \dots, n\}$ y E es el conjunto cuyos elementos son $\{i, i+1\}, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $\{n, 1\}$.

   (i) Representar C_4.

   (ii) ¿Cuántas aristas tiene C_n?

   c) El grafo de *Petersen* P es el de la Figura 1.

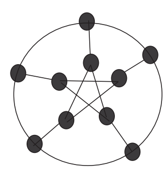


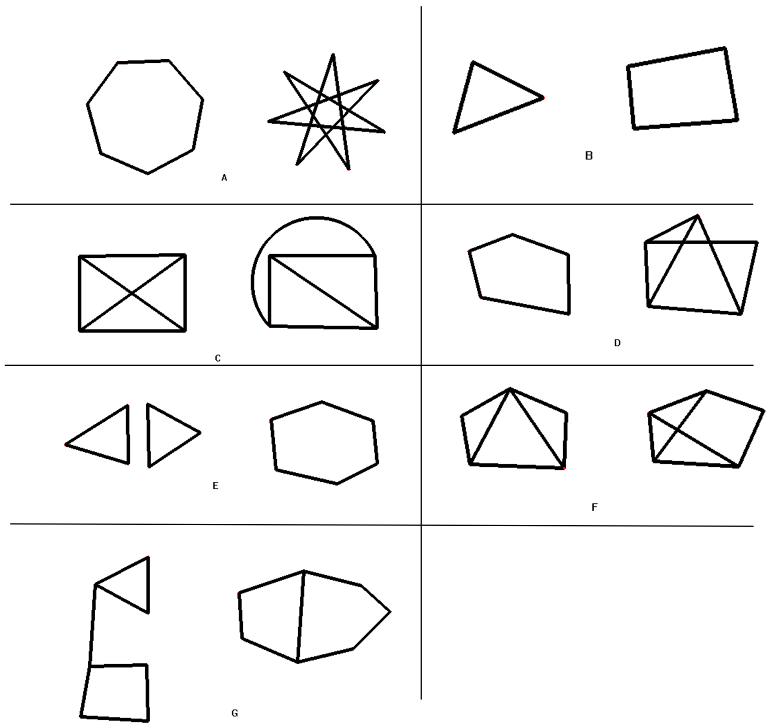
Figura 1: Grafo de Petersen

   (i) ¿Cuántas aristas tiene P?

   (ii) Observar que todo los vértices tienen el mismo grado.

3. Para cada par de grafos de la siguiente figura determinar si los grafos son o no isomorfos.

FIGURA 1



4. Un grafo es *regular* si todos los vértices tienen el mismo grado. Averiguar cuáles de los grafos del ejercicio 2 son regulares.

5. Hallar los complementos de los grafos del ejercicio 2.

6. Observar que si G y G' son isomorfos bajo $f : G \to G'$, entonces G y G' tienen la misma cantidad de vértices y la misma cantidad de aristas y además $gr_G(v) = gr_{G'} f(v)$ para todo vértice v.
   ¿Vale un recíproco de la afirmación anterior?

7. Probar que un grafo bipartito no puede tener ciclos de largo impar.

8. Dado un grafo $G = (V, E)$ se define la relación en V "estar conectado a" como sigue: v está conectado a w si existe un camino entre v y w.

   a) Observar que se trata de una relación de equivalencia.
   b) Observar que G es conexo si y sólo si hay una única clase de equivalencia.
   c) Probar que la componente conexa de un vértice x de un grafo es el máximo subgrafo conexo que contiene a x.

9. Sea G un grafo k-regular con n vértices (es decir que cada vértice tiene grado k). Probar que su complemento es k'-regular para cierto natural k'.

10. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

11. *a*) Sea G un grafo con n vértices con un solo vértice de grado par. ¿Qué se puede afirmar sobre la paridad de n?
    b) Construir un grafo con n vértices para cualquier n impar, que tenga un solo vértice de grado par y al menos dos vértices de grado $n - 2$. Se sugiere trabajar por recurrencia en n impar.

12. *a*) ¿Cuál es el máximo número de vértices posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?
    b) ¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo, construirlo.

13. Para el grafo de la Figura 2, determinar:

    a) Un camino $b - \cdots - d$ que no sea un recorrido
    b) Un recorrido $b - \cdots - d$ que no sea simple
    c) Un camino simple $b - \cdots - d$

d) Un camino cerrado $b - \cdots - b$ que no sea un circuito

e) Un circuito $b - \cdots - b$ que no sea ciclo.

f) Todos los ciclos $b - \cdots - b$

g) Todos los caminos simples $b - \cdots - f$.

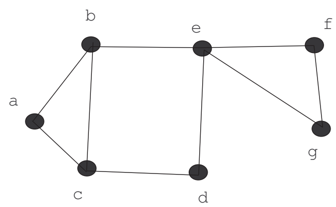
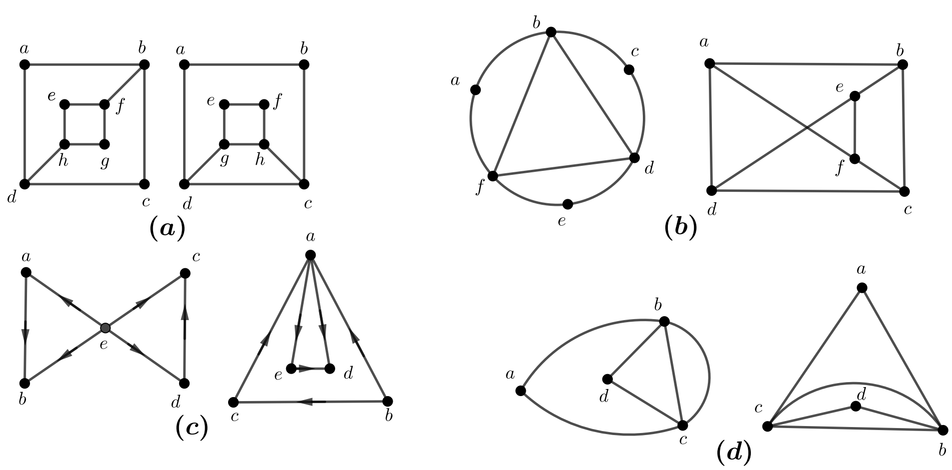


Figura 2:

14. Observar que $K_{2,2}$ y C_4 son isomorfos entre sí pero no son isomorfos a K_4.

15. Representar el grafo $K_{2,3}$ y determinar los posibles subgrafos inducidos por subconjuntos de 3 vértices.

16. Para cada par de grafos (o multigrafos) de la siguiente figura determinar si los grafos son o no isomorfos.



17. Determinar si se cumple o no que:

a) K_4 contiene un camino que no es un recorrido.

b) K_4 contiene un recorrido que no es ni un circuito ni es camino simple.

c) K_4 contiene un circuito que no es ciclo.