Esfera de hierro (conductora) de radio R, carga Q y momento de inercia I.
Inicialmente tiene magnetización $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ uniforme.
La esfera está inicialmente en reposo y es desmagnetizada de manera gradual y uniforme.

a) Explique de forma cualitativa los pasos a seguir para demostrar que el campo magnético inicial es

$$\begin{cases} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}, & |\vec{r}| < R \\ \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[3\vec{r}\,\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right], & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

Momento magnético
$$\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\vec{M}$$

a- No hay densidad de corriente eléctrica $\vec{J}_{libre}$ (esfera en reposo) ni magnética $\vec{J}_M = \nabla\times\vec{M} = 0$, porque $\vec{M}$ es cte en la esfera y nula fuera. El campo eléctrico es estático.

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{\vec{B}(\vec{r},t)}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{r},t), \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

Entonces, en la ley de Ampère:

$$\nabla\times\vec{H} = \nabla\times\frac{\vec{B}}{\mu_0} = 0 \Rightarrow \exists\, \varphi_M \text{ potencial magnético tq. } \vec{B} = \nabla\varphi_M$$

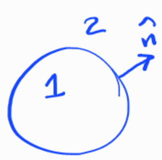
y Gauss:

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \varphi_M \text{ cumple Laplace: } \nabla^2\varphi_M = 0$$

El campo magnético se obtiene resolviendo la ec. de Laplace en coordenadas esféricas dentro y fuera de la esfera, y pegando las soluciones con las condiciones de borde:

En $\begin{cases} r = 0, & \varphi_M \text{ finito} \\ r = \infty \end{cases}$

En $r = R$ $\begin{cases} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\hat{n} = 0 \\ \hat{n}_1 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \end{cases}$



b) Calcule el momento angular total inicial $\vec{L}_{em}$ del campo electromagnético en todo el espacio.

$$\vec{\ell}_{em} = \vec{r} \times \vec{P}_{em}$$

$$\vec{P}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad , \quad \vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$$

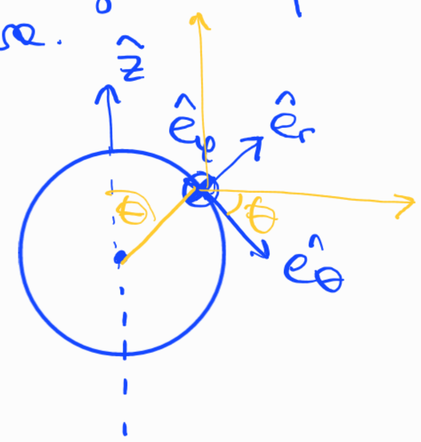
Dentro de la esfera (zona 1)

$$\vec{E}_1 = 0 \Rightarrow \vec{S}_1 = 0$$

Fuera de la esfera (zona 2)

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Campo estático de esfera conductora de carga Q, se obtiene usando ley de Gauss, porque la distribución de la carga es uniforme en la superficie de la esfera.



$$\Rightarrow \vec{S}_2 = \frac{Q R^3 M_0 \,\mathrm{sen}\,\theta}{12\pi\varepsilon_0 r^5}\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\ell}_{em_2} = -\frac{\mu_0 Q M_0 R^3 \,\mathrm{sen}\,\theta}{12\pi r^4}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{L}_{em} = \int_{\text{en todo el espacio}} d^3r\, \vec{\ell}_{em} = \int_R^{+\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\; \vec{\ell}_{em}\, r^2 \,\mathrm{sen}\,\theta$$

como $\hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{y} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{z}$ la única componente no nula de $\vec{L}_{em}$ es según $\hat{z}$.

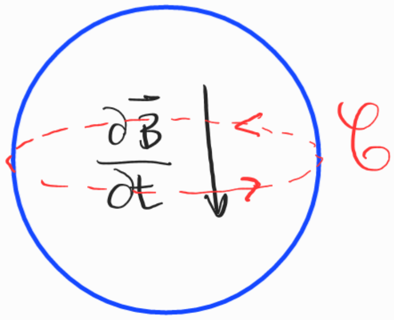
La integral queda $\vec{L}_{em} = \frac{2}{9}\mu_0 Q M_0 R^2\,\hat{z}$

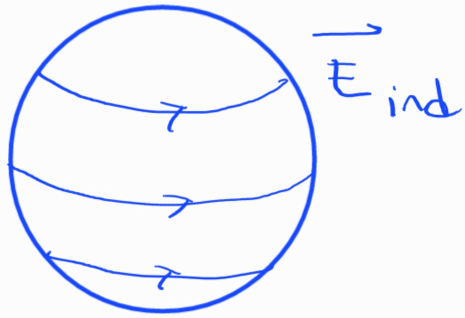
Recuerden que: $\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}$, $\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$

c) Una vez que la esfera comienza a desmagnetizarse también comienza a rotar. Explique cualitativamente porqué.

Cuando $\vec{M}$ disminuye, $\vec{B}$ también. $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \exists$ un campo eléctrico inducido, que se calcula con la ley de Faraday, $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ integrada en $\mathcal{C}$.

Tendremos $\vec{E}_{ind} = E_{ind}\, \hat{e}_\varphi$ en la superficie de la esfera.





Como la esfera tiene una carga Q en la superficie, este campo ejerce un torque sobre esas cargas.

$$\vec{\tau} = \int_{\substack{\text{sup.}\\ \text{esfera}}} \vec{r} \times \underbrace{dq\, \vec{E}_{ind}}_{d\vec{F}}\, ds$$

, lo que hará rotar a la esfera...

d) Asumiendo que el proceso de desmagnetización se realiza sin que actúen torques externos, determine la velocidad angular final de la esfera en función de I, R, Q y M_0.

Al no haber torques externos, tenemos un sistema de cuerpos y campos aislado.

La ley de conservación del momento angular (que no incluye torques mecánicos externos) se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{L}_{em}+\vec{L}_{mec}\right)+\nabla\cdot\overleftrightarrow{M}=0$$

$\int$ integrado en el volumen de todo el espacio, tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{em}+\vec{L}_{mec}\right)=-\underbrace{\int_{S(\vec{r}\to\infty)}}_{\text{Este es el borde del espacio en } r\to\infty}\overleftrightarrow{M}\cdot\hat{n}\,ds$$

$\overleftrightarrow{M}=\vec{r}\times\overleftrightarrow{T}$ → Tensor de Tensiones de Maxwell

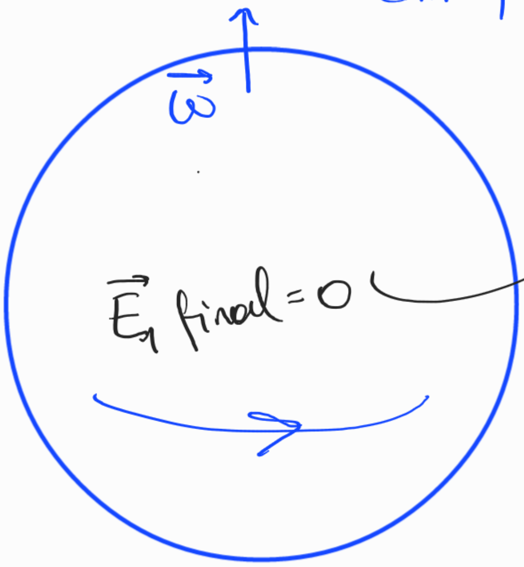
Si los campos decaen lo suficientemente rápido con $|\vec{r}|$, (como $1/r$) esta integral tiende a 0 y el momento angular del sistema se conserva.

Hay que calcular

$$\vec{L}_{mec\ final}+\vec{L}_{em\ final}=\vec{L}_{em\ inicial}$$

y hallar $\vec{\omega}$ con $\vec{L}_{mec\ final}=I\vec{\omega}$ para la esfera.

Calculemos $\vec{L}_{em}$ final : la esfera gira con $\vec{\omega}$ según $\hat{k}$



$\vec{B}$ deja de variar, así que $\vec{E}_{ind} = 0$ nuevamente.

$\vec{E}_2$ final $= \vec{E}_2$ inicial (sólo tengo esfera con Q).

Como la esfera está girando, tengo una densidad superficial de corriente eléctrica

$$\vec{J}_{lib} = \sigma \vec{v}\, \delta(r-R) = \sigma R \omega\, \delta(r-R)\, \hat{e}_\varphi$$

↳ velocidad de las cargas $\vec{v} = R\omega\, \hat{e}_\varphi$

Que genera un campo magnético dentro y fuera de la esfera.

Se puede calcular el momento magnético generado por esta densidad de corriente

$$\vec{m} = \frac{4\pi}{3} \sigma \omega R^4 \hat{z} \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{Q \omega R^2}{3} \hat{z}$$ y lo metemos en ecs. de parte (a) para hallar $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ finales.

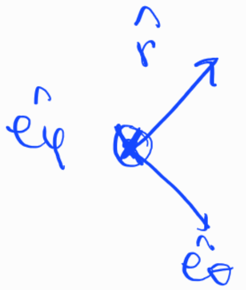
Con $\vec{E}_2$ y $\vec{B}_2$ obtenemos $\vec{S}_2$ y $\vec{L}_{em}$ final.

$$\vec{S}_{2\,final} = \frac{-\Phi}{16\pi^2\varepsilon_0}\,\frac{\vec r\times\vec m}{r^5}$$ nuevamente, pero con el nuevo $\vec m$

lo que nos da $$\vec{l}_{em\,final} = \frac{\Phi^2\omega R^2 \,\mathrm{sen}\theta}{3\cdot 16\pi^2 r^5}\,\hat{e}_\theta \quad , |\vec r|>R$$

$$\vec r\times(\underbrace{\vec r\times\vec m}_{-\mathrm{sen}\theta\,\hat e_\varphi}) \propto \hat e_\theta$$

$$(r^{-3})' = -3r^{-2}$$



Al integrar en todo el volumen fuera de la esfera, de nuevo sólo nos queda la componente vertical

$$\vec L_{em\,final} = \frac{\Phi^2\omega R^2}{3\cdot 16\pi^2}(2\pi)\left(\frac{4}{3}\right)\int_R^{+\infty}\frac{1}{r^3}\,dr\,\hat z$$

$$-3r^{-2}\Big|_R^{+\infty} = \frac{3}{R^2}$$

$$\vec L_{em\,final} = \frac{\Phi^2\omega}{6\pi}\,\hat z$$

El balance nos da:

$$\left(I+\frac{\Phi^2}{6\pi}\right)\omega = \frac{2}{9}\mu_0\Phi M_0 R^2$$

Veamos $\overleftrightarrow{M} = \overleftrightarrow{T} \times \vec{r}$ en $\bar{r} \to \infty$

$$\left(\overleftrightarrow{T}\right)_{ij} = \varepsilon_0\left(E_i E_j - \delta_{ij} E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \delta_{ij} B^2\right)$$

Para $|\bar{r}| > R$, tenemos (al inicio y al final)

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r \quad y \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[3\vec{r}\,\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

$$\sim \frac{1}{r^3}$$

$$\to \overleftrightarrow{T} \sim \frac{1}{r^4} \quad y \quad \overleftrightarrow{M} \sim \frac{1}{r^3}$$ así que

el término de borde en la ley de conservación se anula.

Ustedes deberían tener muchas preguntas acerca de este ejercicio.

1) ¿Cómo es que las cargas "libres" al sentir la fuerza eléctrica del campo $\vec{E}_{inducido}$ hacen girar a la esfera? ¿No estaban libres?

2) ¿Se conserva la energía en este sistema?