

2) a) Ambas $G_D^{(1,2)}$ son soluciones de la Ec. de Laplace en $\vec{x} \neq \vec{x}'$ porque se escriben en la forma

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{\ell, m} \left(A_\ell(\vec{x}') r^\ell + B_\ell(\vec{x}') r^{-\ell-1} \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad \text{con } \vec{x} = (r, \theta, \phi)$$

También se puede chequear que $\nabla^2 G_D(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ pero no se pide ese cálculo en el ejercicio.

Trivialmente ambas son simétricas respecto del cambio $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$

Falta chequear si $G_D(\vec{x}, \vec{x}') \Big|_{\substack{\vec{x} \in \partial V \\ \vec{x}' = V}} = 0$ siendo V el exterior de la esfera.

(1) Para $|\vec{x}| \rightarrow +\infty \Rightarrow G_D^{(1)} \rightarrow 0$
 $G_D^{(2)}$ diverge

$$(2) \text{ Para } |\vec{x}| = R \quad |\vec{x}| = r_<, \quad |\vec{x}'| = r_> \Rightarrow \begin{cases} G_D^{(1)} = 4\pi \sum_{\ell, m} \frac{Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{2\ell + 1} \left(\frac{R^\ell}{r_<^{\ell+1}} - \frac{R^{2\ell+1}}{(r_>R)^{\ell+1}} \right) = 0 \\ G_D^{(2)} = 4\pi \sum_{\ell, m} \frac{Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{2\ell + 1} \left(\frac{R^\ell}{r_<^{\ell+1}} - \frac{(Rr_>)^\ell}{R^{2\ell+1}} \right) \end{cases}$$

Por ortogonalidad de $Y_{lm}(\theta, \phi)$ la función $G_D^{(2)}$ sólo se anula para todo θ, ϕ si $\left[\left(\frac{R}{r'}\right)^2 - \left(\frac{r'}{R}\right)^{2+1} \right] = 0$ y

y esto sólo se da en $r' = R \Rightarrow G_D^{(1)}$ es la función de Green adecuada.

$$\text{Así: } \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') G_D^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{\partial G_D^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \phi(\vec{x}') - \underbrace{G_D^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}')}_{=0} \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'} \right] da'$$

porque la esfera está a tierra

por construcción

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V = \{\vec{x}', |\vec{x}'| > R\}} \rho(\vec{x}') G_D^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}') dV' \quad \text{con} \quad \rho(\vec{x}') = q \delta(\vec{x}' - \vec{x}_q) - q \delta(\vec{x}' + \vec{x}_q) \Rightarrow$$

siendo \vec{x}_q la posición de la carga positiva.

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[G_D^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}_q) - G_D^{(1)}(\vec{x}, -\vec{x}_q) \right]$$

b) Usando coordenadas esféricas $\vec{x}_q = (d, \theta'=0, \phi')$, $-\vec{x}_q = (d, \theta'=\pi, \phi') \Rightarrow$

$$\phi(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell, m} \frac{Y_{\ell m}^*(\theta'=0) - Y_{\ell m}^*(\theta'=\pi)}{2\ell+1} \left(\frac{\tilde{r}_<^\ell}{\tilde{r}_>^{\ell+1}} - \frac{R^{2\ell+1}}{(rd)^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

$\tilde{r}_< = \min\{r, d\}$
 $\tilde{r}_> = \max\{r, d\}$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell} \frac{\sqrt{2\ell+1}}{2\ell+1} \left[P_\ell(1) - P_\ell(-1) \right] \left(\frac{\tilde{r}_<^\ell}{\tilde{r}_>^{\ell+1}} - \frac{R^{2\ell+1}}{(rd)^{\ell+1}} \right) \sqrt{2\ell+1} P_\ell(\cos\theta)$$

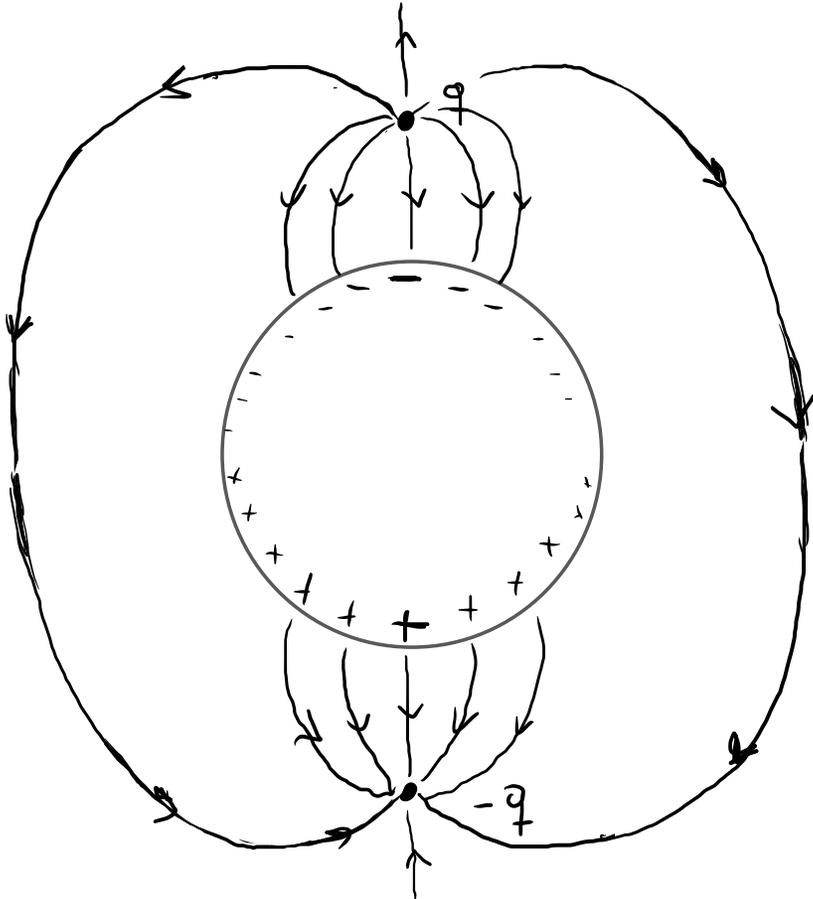
los $Y_{\ell m}^*(\theta'=0)$ y $Y_{\ell m}^*(\theta'=\pi)$ son cero salvo $m=0$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left[1 - (-1)^\ell \right] \left(\frac{\tilde{r}_<^\ell}{\tilde{r}_>^{\ell+1}} - \frac{R^{2\ell+1}}{(rd)^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

se anula salvo ℓ impar

c) El primer orden no nulo es $l = 1 \Rightarrow \phi(\vec{x}) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{r^2} \left(1 - \frac{R^3}{d^3}\right) \cos\theta$

Corresponde al potencial de un dipolo con momento dipolar $q2d\left(1 - \frac{R^3}{d^3}\right)$ donde el dipolo de las cargas puntuales es apantallada por la carga inducida en la esfera.



De lejos se aproxima al campo de un dipolo y de cerca se agregan las líneas de campo que van desde (hacia) las cargas hacia (desde) la superficies de la esfera.