Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico 8

1. En los casos siguientes se considera el espacio V y el subconjunto $\mathcal{A}$ de V.

   a) $V=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}=\{(0,1,1),\ (0,0,1),\ (1,1,1),\ (1,-1,1)\}$.
   b) $V=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}=\{(1,2,-3),\ (4,-1,0),\ (1,-1,1),\ (3,0,-1)\}$.
   c) $V=M_2$, $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3&-1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\3&1\end{pmatrix}\right\}$.
   d) $V=M_2$, $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&-1\\3&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2&5\\6&0\end{pmatrix}\right\}$.

   Se pide:

   a) Determinar si $\mathcal{A}$ es un generador de V.
   b) Determinar si $\mathcal{A}$ es una base de V.

2. Hallar una base del subespacio W en los casos siguientes.

   a) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y+z=0\}$.
   b) $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4: x+y+z+t=0,\ x+y-z-t=0\}$.
   c) $W=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]:\ p(0)=0\}$.
   d) $W=\{p(x)\in\mathbb{R}_2[x]:\ p(1-x)=p(1+x),\ \forall x\in\mathbb{R}\}$.
   e) $W=\{A\in M_3:\ A \text{ es simétrica}\}$.
   f) $W=\{A\in M_3:\ A \text{ es antisimétrica}\}$.

3. En los casos siguientes, sea W el subespacio generado por el conjunto $\mathcal{A}$. Se pide eliminar elementos de $\mathcal{A}$, cuando sea necesario, hasta conseguir una base de W.

   a) $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\right\}\subset M_2$.
   b) $\mathcal{A}=\left\{x,\ x^2-1,\ 2x^2-1,\ x^3+2x,\ x^3+x\right\}\subset\mathbb{R}[x]$.

4. En los casos siguientes, dado el espacio V, el subconjunto $\mathcal{B}$ de V y el vector v de V, se pide: primero probar que $\mathcal{B}$ es base de V y segundo hallar las coordenadas del vector v respecto a la base $\mathcal{B}$.

   a) $V=\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}=\{(1,1,0,0),\ (1,-1,0,0),\ (0,0,5,2),\ (0,0,3,1)\}$, $v=(2,-4,5,7)$.
   b) $V=\mathrm{M}_2$, $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $v=\begin{pmatrix}2&3\\-5&7\end{pmatrix}$.
   c) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B}=\left\{(x-1)^2,\ x-1,\ 1\right\}$, $v=x^2+x+1$.

5. En los casos que siguen, escribir un vector genérico $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ en función de la base dada:

$$\mathcal{B}_1=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\};\quad \mathcal{B}_2=\{(2,1,1),(2,2,1),(1,1,1)\}.$$

6. En los casos que siguen, hallar el vector v sabiendo sus coordenadas en la base dada.

   a) $V=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$, $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v)=(1,-1)$.
   b) $V=\mathrm{M}_2$, $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v)=(1,1,1,1)$.

7. En los casos siguientes, dadas las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de V y las coordenadas de un vector v en la base $\mathcal{B}$, hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y expresar v como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{C}$.

   a) $V=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}=\{(1,1),\ (2,3)\}$, $\mathcal{C}=\{(0,3),\ (5,-1)\}$, $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v)=(2,-1)$.
   b) $V=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}=\{(1,-1,0),\ (0,1,-1),\ (1,0,1)\}$, $\mathcal{C}=\{(3,0,0),\ (1,2,-1),\ (0,1,5)\}$, $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v)=(2,-1,4)$.
   c) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B}=\{x^2,\ x,\ 1\}$, $\mathcal{C}=\{x^2+x+1,\ x+1,\ 1\}$, $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v)=(2,-1,0)$.
   d) $V=\mathrm{M}_2$, $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{C}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v)=(1/2,\ 1/2,\ -1,\ 2)$.

8. Consideramos $\mathcal{B}=\{(1,1),(1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y $A=\begin{pmatrix}5&7\\3&4\end{pmatrix}$.

   a) Hallar la base $\mathcal{C}$ tal que ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}=A$.
   b) Hallar la base $\mathcal{D}$ tal que ${}_{\mathcal{D}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}=A$.

9. Sea $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}=\{f_1,f_2,f_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ obtenida rotando $\mathcal{B}$ alrededor del eje Oz un ángulo θ $(0\le\theta<2\pi)$ en sentido positivo, cuando vemos el plano Oxy desde arriba.

   a) Hallar explícitamente f_1,f_2,f_3.
   b) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
   c) Hallar las coordenadas del vector $(1,1,1)$ en la base $\mathcal{C}$.