Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2022

Práctico 11: Sucesiones y series

1. Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, encuentre el límite (no es necesario utilizar la definición formal, pero si quiere puede usarla).

a) $a_n = 1 - (0{,}2)^n$[1], c) $a_n = \frac{n^3}{n+1}$, e) $a_n = \frac{3^{n+2}}{5^n}$, g) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{n+\sqrt{n}}$,

b) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$, d) $a_n = e^{1/n}$, f) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+4n}}$, h) $a_n = \frac{\ln n}{\ln 2n}$.

2. Determine si la sucesión es (monótona) creciente o (monótona) decreciente, y también si es o no es acotada.

a) $(-2)^{n+1}$, c) $a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$, e) $a_n = n + \frac{1}{n}$,

b) $a_n = \frac{1}{2n+3}$, d) $a_n = n(-1)^n$, f) $a_n = ne^{-n}$.

3. Considere la sucesión definida mediante la recurrencia

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}.$$

a) Demuestre que la suceción es creciente.

b) Demuestre que la suceción está acotada superiormente por 3.

c) Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y calcule $\lim a_n$.

4. Considere la siguiente sucesión:

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots\right\}$$

a) Convénzase de que la sucesión está acotada superiormente.

b) Convénzase de que la sucesión es creciente.

c) Encuentre una recurrencia que defina a_{n+1} en función de a_n. [2]

d) Demuestre que la sucesión es convergente y calcule su límite.

5. Determine si la serie converge o diverge. Si converge, encuentre su suma.

---

[1] Estamos utilizando la notación decimal con mediante el punto en lugar de la coma.
[2] Luego de obtener la recurrencia, podría demostrar rigurosamente los incisos a) y b).

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots,$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots,$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1},$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n},$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n},$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2},$

g) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^k,$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} - \frac{1}{n(n+1)}.$

6. Determine si la serie es convergente o divergente al expresar la sucesión de sumas parciales s_n como suma telescópica. Si es convergente, encuentre su suma.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)},$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right),$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n},$

7. Supongamos que la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

Determine el término general a_n de la serie y la suma de la misma.

8. Encuentre el valor de c tal que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$.

9. Un enfermo toma un medicamento a la misma hora cada día. El medicamento contiene 150 mg de una cierta droga. Se sabe que aproximadamente 5 % de esa cantidad permanece aún en el cuerpo 24 horas después de ingerida la dosis, y por lo tanto, luego de ingerir la segunda dosis, habrá $150 + 7,5 = 157,5$ mg de la droga en el organismo del enfermo.

a) Calcule la cantidad de droga que está en el cuerpo justo antes de ingerir la cuarta dosis.

b) Calcule la cantidad de droga que está en el cuerpo justo antes de ingerir la $n-$ésima dosis.

c) Calcule la cantidad apoximada de la droga queda en el cuerpo a largo plazo.

10. Una cierta pelota tiene la propiedad de que cada vez que cae desde una altura h sobre una superficie nivelada y dura, rebota hasta una altura rh, donde $r = 1/3$. Asumiremos que la pelota cae desde una altura inicial de 25 metros.

a) Suponiendo que la pelota continúa rebotando de manera indefinida, calcule la distancia total apróximada que recorrerá luego de un período largo de tiempo.

b) Suponiendo que cuando la pelota cae desde la altura menor o igual a $0,01$ metro la misma deja de rebotar y queda en reposo, calcule el tiempo total en que la pelota está cayendo (hay que usar que la pelota cae $\frac{1}{2}gt^2 \approx 5t^2$ metros en t segundos). Deducir una cota para el tiempo en que la pelota está en movimiento.