Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Matemática Discreta
Año 2022

Repartido 9: Planaridad y coloraciones

1. Un árbol es un grafo conexo sin ciclos (y por lo tanto sin lazos).

   a) Una hoja de un árbol es un vértice de grado 1. Probar que todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.

   b) Sea T un árbol con v vértices y e aristas. Probar, por inducción en v, que $e = v - 1$.

   c) Probar que todo árbol es plano.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo plano 4-regular conexo. Si $|E| = 16$, ¿cuántas regiones hay en una representación plana de G?

3. Mostrar que la fórmula de Euler no vale si G no es conexo. Adaptar la fórmula al caso disconexo agregando como parámetro el número de componentes conexas. Demostrar la fórmula escrita en base a la fórmula de Euler para grafos conexos.

4. Mostrar que si se elimina cualquier arista de K_5, el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo $K_{3,3}$?

5. *a*) Probar que un grafo plano tiene al menos un vértice de grado menor o igual a 5 (usamos este resultado para probar el Teorema de los 6 colores, y también el de los 5, por lo que está probado en las notas del curso también).

   b) 1) Probar que un grafo planar con 11 vértices o menos tiene un vértice de grado menor o igual a 4.

   2) Usar este resultado para probar que todo grafo con 11 vértices o menos tiene admite una 5-coloración.

   3) Observar que la prueba del Teorema de los 5 colores se adapta a un Teorema de los 4 colores para grafos de 11 vértices o menos.

6. Probar que el grafo de Petersen no es plano (sugerencia: encontrar un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$).

7. Dada una relación cualquiera $\mathcal{R} \subseteq A \times A$. Probar que existe una única relación de equivalencia $\cong$ en A tal que

- $\cong$ contiene a $\mathcal{R}$,
- si $\equiv$ es otra relación de equivalencia en A que contiene a R, entonces $\equiv$ contiene también a $\cong$.

$\equiv$ se llama la relación de equivalencia generada por $\mathcal{R}$.
(Recordar que definimos la relación de homeomorfismo como la relación de equivalencia generada por la relación en grafos "ser subdivisión elemental de")

8. Tomar un mapa político de América del Sur.

   a) Hallar su grafo asociado

   b) Observar que es planar,

   c) Observar que admite una 4-coloración.

   d) Observar que no admite una 3-coloración y detectar cuál es la configuración de países que fuerza a los cuatro colores.

9. Hallar un grafo que precise de exactamente n colores.

10. Consideremos el juego del Sudoku. Se tiene un tablero cuadriculado con 81 celdas, agrupadas en 9 cuadrados de 9 celdas cada uno. Al comienzo del juego, algunas celdas tienen asignados algunos números del 1 al 9 (tablero inicial). El objetivo del juego es llenar el tablero de modo que dos celdas que pertenecen a una misma fila, a una misma columna o a un mismo cuadrado, no tienen el mismo número.
    Considerar un grafo cuyos vértices sean las celdas del Sudoku y cuyas aristas estén dadas por la relación de pertenecer a una misma fila, a una misma columna o a un mismo cuadrado.

    a) Contar la cantidad de vértices del grafo y el grado de cada vértice.

    b) Deducir la cantidad de aristas.

    c) Interpretar el juego del Sudoku en términos de coloraciones de este grafo.